



## Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium

2600 Vác, Németh László u. 4- 6.

☎: 27- 317 - 077

☎/fax: 27- 315 - 093

WEB: <http://boronkay.vac.hu> e-mail: [boronkay@vac.hu](mailto:boronkay@vac.hu)



Levelező Matematika Szakkör

2012/2013. 3. feladatsor  
7.-8. évfolyam

### A maradékos osztás

Még biztos előfordul, hogy papíron, fejben kell elvégeznetek egy osztást. Így értitek nyilván, hogy mi is áll itt.

$$112 : 4 = 28$$

$$\_ 32$$

$$\_ \_ 0$$

Az egyenlőségjel után szerepel az eredmény, az osztandó alá pedig a maradékokat írjuk. Ebben az esetben a 4 maradéktalanul megvan a 112-ben 28-szor, amit egyszerűbben is fel tudunk írni:  
 $112 = 28 \cdot 4$

Nézzünk egy olyan példát is, ahol az osztási maradék nem nulla. Most is 28-szor van meg a négy a 115-ben, de itt 3 a maradék. Most is szeretnénk egy sorban, röviden megfogalmazni a kapott eredményt:

$$115 = 28 \cdot 4 + 3$$

$$115 : 4 = 28$$

$$\_ 35$$

$$\_ \_ 3$$

Fogalmazzuk meg általánosan, mit is jelent ez.

$$\text{osztandó} = \text{hányados} \times \text{osztó} + \text{maradék}$$

Ez a felírási mód több feladat megoldásában is segíthet.

### Mintapéldák

- 1.) Melyik az a szám, amelyiket 7-tel osztva a maradék 2; 15-tel osztva, a maradék 6 lesz?  
Tudjuk továbbá, hogy az első hányados úgy aránylik a másodikhoz, mint 7:3.

A keresett számot jelölje  $A$ , a két hányadost pedig  $x$  és  $y$ . Tudjuk a hányadosok arányát, így  $x = 7a$ ,  $y = 3a$ , ahol  $a$ -val jelöltük az egy részt. A fenti átírás segítségével a keresett számot kétféleképpen is fel tudjuk írni:

$$A = 7a \cdot 7 + 2$$

$$A = 3a \cdot 15 + 6$$

Mindkét felírással ugyanazt az  $A$  számot kapjuk, így

$$49a + 2 = 45a + 6$$

Ha ezt az egyenletet a szokásos módon megoldjuk, a – ra 1-et kapunk, azaz  $x = 7$ ,  $y = 3$ , és a keresett szám  $A = 51$ . Gyorsan ellenőrizhetjük, hogy 51 tényleg megfelel a feladat feltételeinek.

Persze időnként az egyenletek inkább nehezítik a feladat megoldását, jobban járunk, ha kicsit gondolkozunk.

- 2.) A Mikulásgyárban a manók több láda narancsot szerettek volna szétosztani a gyerekek között. Kiderült azonban, hogy 10-esével csomagolva az utolsó zacskóba csak 9 jut. Amikor megpróbálták 9-esével szétosztani, az utolsó zacskóba csak 8, amikor 8-asával, akkor meg az utolsó zacskóba csak 7 narancsot tartalmazott. Az egyik manó most már kíváncsi lett és kiszámította, hogy ha 7-esével, 6-osával, 5-ösével, 4-esével, 3-asával, 2-esével osztották volna szét, akkor sem sikerült volna maradék nélkül, mert az utolsó zacskóba rendre 6, 5, 4, 3, 2, 1 jutott volna. Legalább hány narancsot szerettek volna szétosztani?

*Ha algebrai úton próbálnánk megoldani a feladatot, akkor 9 egyenletet kellene felírnunk, és 10 ismeretlenünk lenne. Egyszerűbb, ha arra gondolunk, hogy mindig eggyel kevesebb narancsunk marad az utolsó zacskóba, mint kellene. Vagyis a narancsok számánál 1-gyel nagyobb szám maradék nélkül osztható 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 számok mindegyikével. Mivel ezeknek a legkisebb közös többszöröse 2520, így a narancsok száma 2519.*

Az olyan típusú feladatoknál is az osztási maradék az érdekes, amikor egy szám valahány utolsó jegyére kérdezzük. Ha az utolsó jegy az érdekes, akkor a 10-zel vett osztási maradék a kérdés, ha az utolsó két jegy, akkor a 100-zal vett osztási maradék, stb. Nézzünk erre is egy példát.

- 3.) Mi lehet egy négyzetszám utolsó jegye?

*Minden szám  $10x + \text{maradék}$  alakban írható föl, ahol a maradék egy 0 és 9 közötti szám. Nézzük ezek négyzeteit:*

$(10x + 0)^2 = (10x)^2 = 100x^2$  Ez a szám 100 többszöröse, tehát biztosan nullára végződik.

$(10x + 1)^2 = (10x + 1)(10x + 1) = 100x^2 + 20x + 1$ . Itt az első két tag osztható 10-zel, tehát 1-re fog végződni a szám.

$(10x + 2)^2 = (10x + 2)(10x + 2) = 100x^2 + 40x + 4$ . A fenti esethez hasonlóan, az utolsó jegy 4 lesz.

$(10x + 3)^2 = (10x + 3)(10x + 3) = 100x^2 + 60x + 9$  azaz a szám utolsó jegye a 9.

*Ha ezt a módszert folytatjuk, akkor rendre*

$(10x + 4)^2$  esetén 6-ot kapunk  $(10x + 5)^2$  esetén 5-öt  $(10x + 6)^2$  esetén 6-ot  $(10x + 7)^2$  esetén 9-et  $(10x + 8)^2$  esetén 4-et és végül  $(10x + 9)^2$  esetén 1-et.

*Összefoglalva, egy négyzetszám végződhet: 0, 1, 4, 5, 6, 9 számok bármelyikére, másra viszont nem. Ennek a megállapításnak a segítségével gyorsan el tudjuk dönteni, hogy 2013 négyzetszám-e? Mivel négyzetszám nem végződhet 3-ra, így biztosan nem.*

- 4.) 2013. január 1. keddre esik. Milyen napra esik Újév első napja 2014-ben?

*2013 nem szökőév, így 365 napból áll az év. Nézzük meg, ez pontosan hány hétnek felel meg:  $365 = 52 \cdot 7 + 1$ . Azaz 52 teljes hét, és még egy nap, azaz jövőre egy napot csúszik minden, azaz az év első napja szerdára fog esni. (Megjegyzés: ez persze azt is jelenti, hogy szökőévben 2 napot csúszik minden.)*

## **Gyakorló feladatok**

- 1.) Melyik az a kétjegyű szám, melynek második jegye 3-mal nagyobb, mint az első, héttel osztva 2 maradékot ad és 6-tal osztva 4 maradékot? (Gondolj az előző témára, készíts táblázatot, nézd meg az eseteket!)
- 2.) Melyik az a háromjegyű szám, melynek jegyeinek összege 10, és 5-tel osztva 2 maradékot ad?
- 3.) Milyen maradékot adhatnak a négyzetszámok a 4-gyel való osztás után?
- 4.) 1988 februárjában 5 hétfő volt. Mikor lesz megint ilyen év?

## **Kitűzött feladatok**

- 1.) Mi lehet egy négyzetszám utolsó két jegye?
- 2.) Aki babonás, az fél a 13-adikától, különösen, ha péntekre esik. Egy évben legalább és legfeljebb hány olyan hónap van, amikor 13-adika péntekre esik?
- 3.) Rozi néni 6 kosár tojást árul a piacon. Minden kosárban vegyesen tyúk- és kacsatojások vannak. Az egyes kosarakban 10, 12, 16, 17, 18, 19 db tojás van. Rozi néni az egyik kosarat nézve megállapította: ha ezt a kosár tojást eladnám, pontosan kétszer annyi tyúktojásom maradna, mint kacsatojásom. Melyik kosárra gondolhatott?
- 4.) Gondoltam egy számot! Ha ehhez hozzáadom a nála 3-mal nagyobb számot, akkor az összeg osztható lesz 5-tel. A gondolt szám és a nála 5-tel kisebb szám összege 3-mal osztható. A gondolt számot 15-tel osztva mennyi lesz a maradék?

Beküldési határidő:

**2013.01.15.**

Postai cím:

Matematikai Tehetségfejlesztő,  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.