Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör **2012/2013.3. feladatsor**
7.-8. évfolyam

MEGOLDÁSOK

1. Ha valaki tud programozni, az pillanatok alatt kiírathatja az első 100 természetes szám négyzetét, s ezzel meg is kapja a lehetséges végződéseket. De papír és ceruza segítségével sem reménytelen a vállalkozás, szép szabályszerűségeket vehetünk észre. Vegyük először a 0-ra végződő számokat. Ezek a 10-zel osztható számok, négyzetük osztható 100-zal, azaz két nullára végződnek.
Az 5-tel osztható számok négyzete osztható 25-tel, így 25-re is végződnek.

Innentől kezdve párhuzamosan nézzük 1-től 100-ig az 1-re és a 9-re, a 2-re és a 8-ra, a 3-ra és a 7-re, a 4-re és a 6-ra végződő számok négyzeteit, pontosabban a vizsgált utolsó két jegyet. Használjunk ismét táblázatot.

1-re végződő számok	négyzetük utolsó két jegye	9-re végződő számok	négyzetük utolsó két jegye
01	01	09	81
11	21	19	61
21	41	29	41
31	61	39	21
41	81	49	01
51	01	59	81
61	21	69	61
71	41	79	41
81	61	89	21
91	81	99	01

Jól látható, hogy csak 5 különböző végződés szerepel.

Ha a fent említett párokra is elkészítünk egy ilyen táblázatot, hasonló szabályszerűséget vehetünk észre. Egyrészt ismétlődnek a végződések egy oszlopon belül, másrészt mindegy hogy egy szám egy tízzel osztható számnál 1-gyel nagyobb vagy 1-gyel kisebb, hasonlóan 2-vel nagyobb vagy 2-vel kisebb, négyzetre emelés után ugyanazok a végződések jönnek elő, csak pont fordított sorrendben.

Nézzünk még egy ilyen párt.

1-re végződő számok	négyzetük utolsó két jegye	9-re végződő számok	négyzetük utolsó két jegye
01	01	09	81
11	21	19	61
21	41	29	41
31	61	39	21
41	81	49	01
51	01	59	81
61	21	69	61
71	41	79	41
81	61	89	21
91	81	99	01

A 3 és a 7 végű számokra hasonlóan, de nézzük ismétlődések nélkül már:

3-ra végződő számok	négyzetük utolsó két jegye
03	09
13	69
23	29
33	89
43	49

Valamint a 4-re és 6-ra végződő számokra:

4-ra végződő számok	négyzetük utolsó két jegye
04	16
14	96
24	76
34	56
44	36

Összesen 22 különböző végződést soroltunk tehát föl.

2. Készítsünk el egy táblázatot, mely tartalmazza, hogy egy közönséges évben (tehát nem szökőévben) egy bizonyos hónap 13. napja az évnek hányadik napja, majd írjuk alá a számnak a 7-tel való osztási maradékát.

Hónap	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Az év hányadik napja	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
7-tel való osztási maradék	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4

Mivel egy hét 7 napból áll, az év két napja akkor esik a hétnek ugyanarra a napjára, ha sorszámaik 7-tel osztva ugyanazt a maradékot adják. A táblázat utolsó sorában a 0, az 1, a 3 csak egyszer fordul elő, de a 2 háromszor is, vagyis legalább egyszer és legfeljebb háromszor eshet 13-adika péntekre. (Szökőév esetén a táblázat adatai márciustól egyet csúsznak, de a végeredmény ugyanaz.)

3. A tojások száma eredetileg $10+12+16+17+18+19=92$. Az egyik kosár eladása után a maradék tojások száma 3-mal osztható. Hiszen 2-szer annyi tyúktojás van, mint kacsatojás.
A tojások száma közül 3- mal osztható a 12 és a 18, 1 maradékot ad a 16, 19, 10, ezek összege 3-mal osztható. 2 maradékot egyedül a 17 ad, így erre a kosárra gondolt Rozi néni. Az összeg máshogyan nem lehet 3-mal osztható, mert bármelyik másik tagot kihagyva mindig lesz maradék.

4. Legyen x a gondolt szám.
Ennek és a nála 3-mal nagyobb számnak az összege x+x+3 osztható 5-tel, így 2x+3=5n. Ekkor 2(x-1) +5 osztható 5-tel, ez pedig csak akkor igaz, ha 5 osztója x-1-nek. Tehát x 5-tel osztva 1 maradékot ad. A gondolt szám és a nála 5-tel kisebb szám összege x+x-5 osztható 3-mal, így 2x-5=3m. Ekkor 2(x-3) +1 osztható 3-mal, tehát x-3 hárommal osztva 1 maradékot ad. Ezért x 3-mal osztva is 1 maradékot ad. Tehát x-1 3-mal és 5-tel is osztható, ezért x 15-tel osztva 1 maradékot ad.