



Mit lehet a matematikában szitálni?

Szitálni, rostálni szoktak lisztet, hogy kiszedjék a nem ehető magvakat, amik a lisztbe belekeveredtek. Vagy az aranyásók átszitálják a sódert, így keresik a szitán fennmaradó aranyrögöket. A matematikában is hasonlóan működik a szitálás: egy feladat megoldását nem feltétlen tudjuk közvetlen megmondani, hanem kirostáljuk a nem jó válaszokat, s ami fennmarad a rostán, az lesz a keresett megoldás. Nézzünk meg néhány példát, hogy érthetőbb legyen, miről is van szó.

Mintapéldák

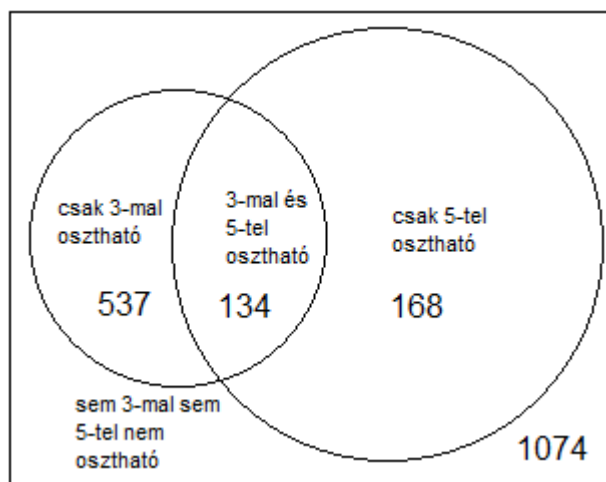
- 1.) Már lehet, hogy hallottatok az eratoszthenészi szitáról. Eratoszthenész (görög matematikus, geográfus, csillagász) úgy kereste meg a 100-nál kisebb pozitív egész számok körül azokat, melyeknek pontosan 2 osztójuk van, azaz a prímeket, hogy felírta 1-től 100-ig az egész számokat, és az elsők kivételével sorra kihúzta a 2-vel oszthatókat, a 3-mal oszthatókat, a 4-gyel oszthatókat, stb. Amit nem húzott ki, azok az 1 kivételével csupa prímek voltak.
- 2.) Az 1, 2, ... 2013 számok között hány olyan van, ami
 - a. nem osztható 3-mal?
 - b. nem osztható 5-tel?
 - c. nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel?

Az előző módszer persze itt is működik, de kicsit hosszadalmas, meg a kérdés is más jellegű. Nem az a kérdés, hogy mely számok nem oszthatóak 3-mal, hanem az, hogy hány ilyen van.

- a. *Azt tudjuk, hogy $2013 = 671 \cdot 3 + 0$, azaz 2013-ban pont 671-szer van meg a 3, azaz 671 hárommal osztható szám van 1-től 2013-ig, vagyis $2013 - 671 = 1342$ olyan, ami nem osztható 3-mal.*
- b. *Itt is hasonlóan gondolkozhatunk. $2013 = 402 \cdot 5 + 2$, azaz 402 5-tel osztható szám van 1-től 2013-ig, azaz $2013 - 402 = 1611$ olyan, ami nem osztható 5-tel.*
- c. *Talán itt is működik az előbb már bevált módszer. Kirostáljuk a 3-mal osztható számokat, az 5-tel oszthatóakat, és ami fennmarad, az lesz a megoldás. Igen ám, de a 15, 30, 45, ... számokat kétszer is kiszitáljuk. Ezt a problémát úgy lehet orvosolni, hogy 2013-ból kivonjuk a 3-mal osztható számok számát, az 5-tel osztható számok számát, de a 15-tel osztható számok számát hozzáadjuk, mert azokat kétszer is levontuk. Vagyis $2013 - 671 - 402 + 134 = 1074$ olyan szám van 1-től 2013-ig, ami nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel.*

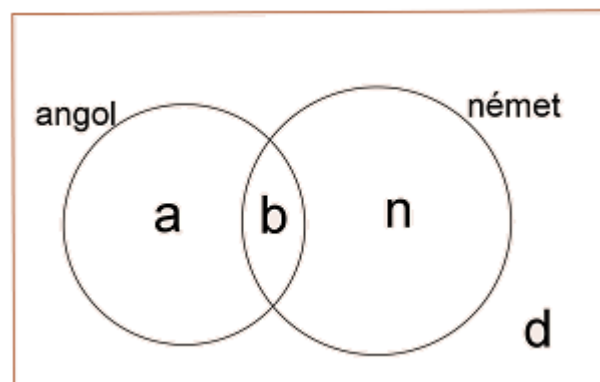
Az előző feladatban azt is megkérdezhettük volna, hogy 1-től 2013-ig hány olyan szám van, ami osztható 3-mal, de nem osztható 5-tel, vagy fordítva. Az ilyen jellegű feladatok

megoldását segíti, ha a lentihez hasonló ábrát készítünk. Az egyik körbe kerülnek a 3-mal osztható számok, a másikba az 5-tel oszthatóak. Ahol a két kör fedi egymást, oda kerülnek azok a számok, melyek mindkét feltételnek megfelelnek. Beleírtuk az ábrába, hogy az egyes tartományok milyen tulajdonságú számokat tartalmaznak.



- 3.) Egy 32-fős osztályban 17-en járnak angolra, 18-an pedig németre. Mindenki tanul legalább egy nyelvet. Hányan tanulnak angolul is és németül is? Hányan vannak, akik csak az egyik nyelvet tanulják?

Vegyük az előző ábránkat. Jelölje a azok számát, akik csak angolul tanulnak, n azok számát, akik csak németül tanulnak, b azok számát, akik mindkét nyelvet tanulják, és d azok számát, aki nem tanulják egyik nyelvet sem. Mivel mindenki tanul legalább egy idegen nyelvet, így $d = 0$. Akik tanulnak angolul, azok vagy csak angolul tanulnak, vagy mindkét nyelvet tanulják, azaz $17 = a + b$. Hasonlóan, németül azok tanulnak, akik csak németül tanulnak, meg akik mindkét nyelvet tanulják, vagyis $18 = n + b$. Azt tudjuk még, hogy összesen 32 diák jár ebbe az osztályba, vagyis $32 = a + b + n$.



Írjuk egymás alá az előző összefüggéseket, hogy jobban átlássuk, mit is tudunk eddig.

$$\left. \begin{array}{l} 17 = a + b \\ 18 = n + b \\ 32 = a + b + n \end{array} \right\}$$

Ha az első két egyenletet összeadjuk, a bal oldalt a bal oldallal, a jobb oldalt a jobb oldallal, akkor $35 = a + n + 2b$ adódik, amit a harmadik egyenlettel összehasonlítva $3 = b$ adódik, vagyis 3-an tanulnak angolul és németül is. Ebből már egyszerűen megkapjuk, hogy csak angolul $17 - 3 = 14$ fő tanul, csak németül $18 - 3 = 15$ fő, azaz 29 diák tanul csak egy nyelvet.

Gyakorló feladatok

- 1.) Hány olyan szám van az 1, 2, ..., 2013 számok közt, mely
 - a. nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?
 - b. nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, de 5-tel igen?
 - c. a 2, 3, 5 közül pontosan eggyel osztható?

- 2.) Egy iskolai osztályban felmérést végeztek, ki szereti a matematikát, a testnevelést illetve a történelmet. A tanulók 70%-a nevezte meg a matematikát, 80%-a a testnevelést és 90%-a a történelmet. 12-en voltak közöttük, akik mindhármat megnevezték és nem volt olyan diák, aki csak egyetlen tárgyat szeret a háromból és olyan se, aki egyet sem szeret. Hányan járnak az adott osztályba összesen?
- 3.) A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen 3 kérdést tüztek napirendre, mely fölött szavazással próbáltak dönteni. A kérdések a következők voltak:
1. Okosabb-e a majom, mint az ember?
 2. Szébb-e a majom, mint az ember?
 3. Igaz-e, hogy az ember a majom őse?
- a.) A szavazás után kiderült, hogy az 1. és 3. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a második kérdésre csak 17.
- b.) Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a 2., 12-en pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel.
- c.) Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak. Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

Kitűzött feladatok

- 1.) Hány olyan szám az 1, 2, ... 2013 számok között, mely a 2, 3, 5, 7 számok közül pontosan eggyel osztható?
- 2.) Hány olyan szám van az 1, 2, ... 2013 számok között, mely a 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható?
- 3.) Az osztály új tanárt kapott. A hetes így mutatta be társait: „Az osztálynak 45 tanulója van, köztük 25 fiú. A jó vagy jeles rendű tanulók száma 30, köztük 16 fiú. 28-an sportolnak, köztük 18 fiú, ill. 17 jó vagy jeles eredményű tanuló van. 15 olyan fiú van, aki jó vagy jeles tanuló, és sportol is”. A tanár rövidesen szól, hogy a jelentés hibás. Hogyan jött rá?
- 4.) Egy osztály létszáma 24. Az osztályban három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Mindenki tanul legalább egy nyelvet. Angolul 15-en, németül 14-en, franciául 5-en tanulnak. Pontosán két nyelvet összesen 6-an. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

Beküldési határidő: **2013.02.15.**
Postai cím: Matematikai Tehetségfejlesztő,
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.