Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2012/2013. 5. feladatsor***
7.-8. évfolyam

Nyerőjátékok?

Megállítunk az utcán egy járókelőt, s megkérdezzük, melyik csokoládét szereti, a keserűt, vagy a tejcsokit. Elvileg itt választania kell, azaz vagy az egyiket mondja, vagy a másikat, tehát 50-50% az esélye, hogy az egyiket vagy a másikat mondja. Vagy mégsem? Statisztikai felmérések szerint az emberek többsége a tejcsokit kedveli jobban, az igazi ínyencek szeretik a keserű csokit, s van egy viszonylag szűk réteg, akik egyáltalán nem kedvelik az édességeket, így a csokoládét sem. Mekkora is akkor az esélye, valószínűsége annak, hogy akit mi megszólítottunk, az a tejcsokira szavaz? Ha átlagosan száz emberből 80 választja a tejcsokit, akkor bizony 80:100 (olvasd: 80 a 100-hoz) az esélye annak, hogy tejcsoki lesz a válasz. Ugyanez más alakban: annak a valószínűsége, hogy a tejcsokit választja $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}=\frac{\textit{tejcsokira szavazók száma}}{\text{összes megkérdezettek száma}}$. A hétköznapi életben és a matematikán belül is gyakran beszélünk valószínűségről. Ilyenkor arra vagyunk kíváncsiak, milyen gyakran következik be valami, mennyire lehetünk biztosak abban, hogy bekövetkezik-e egy bizonyos esemény. Az előző csokoládés feladat alapján fogalmazzuk meg általánosabban, mit is értsünk ezentúl egy esemény bekövetkezésének valószínűségén. Azt vizsgáljuk, hogy hosszú távon az esetek hányad részében következik be, azaz $p(A)=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\textit{összes}\text{ esetek száma}}$ (olvasd: az A esemény bekövetkezésének valószínűsége)

Mit is jelent ez? Egy számítógépes játék leírásában az szerepel, hogy 0,34 valószínűséggel nyerünk mi a gép ellenében. Vagyis, ha százszor játszunk, akkor körülbelül 34 alkalommal nyerünk mi. Ez nem azt jelenti, hogy ha leülünk a gép elé, végigjátszunk 100 játékot és történetesen 37 alkalommal sikerül nyernünk, akkor becsapott a játék leírása. Ez azt jelenti, hogy hosszú távon, átlagosan 100 játékból 34 alkalommal mi nyerünk.

A különböző játékokkal kapcsolatban, ha esetleg pénzben játszunk, az is érdekes, hogy a várható nyeremény értéke hogyan alakul. Az előző példában, ha egy tündér minden játék előtt kitesz egy petákot, akkor 100 játszma után a számítógépé lesz 66, a miénk pedig 34 peták, azaz a mi nyereményünk a mi nyerési esélyünk és az összesen elnyerhető összeg szorzata.

Azért a nyeremény kiszámításánál időnként a saját költségünket is be kell kalkulálnunk. Vegyünk például egy leegyszerűsített lottót. Egy szelvény kerüljön 1 fabatkába, egy játszmával pedig nyerhessünk 2 fabatkát. Továbbá tudjuk még, hogy 0,1 valószínűséggel nyerünk. Mekkora a várható nyeremény 10 játszma után?

A 10 játszmából átlagosan egyszer nyer, ekkor a költséget is figyelembe véve nyer egy petákot, a maradék 9 játszmában veszít, tehát csak költsége van, azaz $1 - 9 = -8$ peták a várható nyereménye, azaz eléggé veszteséges ez a játék. Másként, a várható nyereményt megkapjuk, mint: p(nyerünk)×nyeremény összege – p(veszítünk)×veszteség. Az előző példára nézve:

$0{,}1\times 1 - 0{,}9\times 1 = -0{,}8$, ami 10 játszma után 8 peták veszteséget jelent.

Mintapéldák

1.) Márti és 4 barátnője együtt tartják a születésnapjukat. Elhatározták, hogy saját maguk készítenek egymásnak ajándékot. Márti képeket festett.

a) Hányféle sorrendben adhatja Márti a kiválasztott 4 képet a barátnőinek, ha mindegy, hogy melyiket ki kapja?

b) Márti 6 képet készített, ezekből válogatja ki a legszebbeket barátnőinek. Hány lehetősége van így?

c) Ismét 6 képből választunk. Anna a cicákat, Dóra a kutyákat szereti. Mekkora a valószínűsége, hogy ők pont a kedvencüket ábrázoló képet kapnak, ha Márti nem figyel erre? És annak, hogy pont egymás kedvenceit kapják? (A 6 képből egyen van cica, illetve egy másikon kutya.)

a) Nevezzük Márti barátnőit A-nak, B-nek, C-nek, D-nek. Ekkor A négyféle kép közül kaphat, B már csak 3, C kétféle, és D az utolsó képet kaphatja.
A megoldás : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$
(n! - nak (n faktoriális) nevezzük 1-től n-ig a pozitív egész számok szorzatát.)

b) Ha 6 képet készített, akkor A-nak 6, B-nek 5, C-nek 4, D-nek 3 -féle kép közül választhat.
Így a megoldás: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{2!}$ *lehetősége van.*

c) Ekkor Anna cicát, Dóra kutyát kap, a másik két lány 4, illetve 3 féle képet kaphat. Ezek szorzata 12.
Valószínűséget úgy számolunk, hogy a kedvező esetek számát elosztjuk az összes eset számával. Ezért a valószínűség értéke legalább nulla, legfeljebb 1. Ebben az esetben: $\frac{12}{360} = \frac{1}{30} = 0{,}034$. *Ha pont egymás kedvencét kapják, akkor is ugyanekkora a valószínűség, mert a két betűt kell megcserélnünk.*

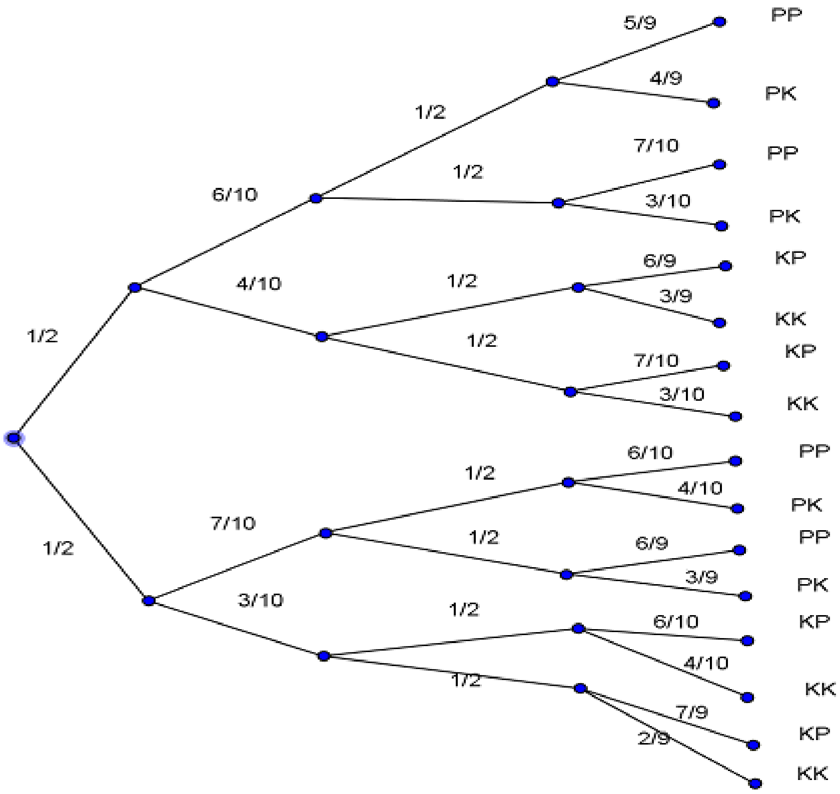
Az összeszámlálási és a valószínűségszámítási feladatok megoldásában gyakran segít a táblázat mellett, vagy helyett, egy másik ábrázolási mód, az úgynevezett valószínűség fa megrajzolása.

2.) Két dobozban van 10-10 golyó, az egyikben 6 piros és 4 kék, a másikban 7 piros és 3 kék. A két doboz közül egyforma valószínűséggel választunk. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 húzás után 2 piros golyónk lesz? (A kihúzott golyókat nem tesszük vissza!)

A fa ágaihoz az egyes döntések valószínűségeit írtuk. Először választani kell a dobozok közül, aztán veszünk a kiválasztott dobozból, majd ismét a dobozok közül választunk, majd megint húzunk, de az előző húzásunktól függ, hogy hány golyó van még a dobozban, és azok milyen színűek. Jól látható az ábra jobb szélén, hogy négy esetben kaptunk végül 2 piros golyót, húzhatunk elsőre az első dobozból pirosat, s másodikra is, vagy először az elsőből, aztán a másodikból, vagy először a másodikból, aztán az elsőből, s végül először is, másodszor is a másodikból. Így a keresett valószínűség ebből a négy esetből tevődik össze, azaz

$$p(\textit{két piros golyó}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9} = \frac{41}{100}$$

Nézzük meg csak az utolsó esetet: ½ valószínűséggel választjuk elsőre a második ládát, ekkor ebből 7/10 valószínűséggel húzunk pirosat. Ismét ½ valószínűséggel választjuk a második ládát, de ekkor már csak 9 golyó van benne, és ezek közül már csak 6 piros, azaz 6/9 valószínűséggel húzunk innen ismét pirosat. A többi hasonló gondolatmenettel adódik.



3.) A „félkarú rabló” szerencsejáték automatában három gyorsan forgó kereket kell úgy megállítani egy-egy nyomógombbal, hogy a három keréken ugyanaz az alakzat legyen látható. Ha mindhárom keréken van 5 alma, 5 szilva, 5 körte és 5 cseresznye, és véletlenszerűen állítjuk meg a kerekeket, akkor mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan gyümölcs jön ki mindegyiknél?
Ha 100 forintért háromszor játszhatunk, és 3 egyforma gyümölcs esetén 400 forintot nyerünk, akkor 1000 forint értékű játék esetén mekkora lesz a várható nyeremény összege?

A lehetséges eredmény, ha elsőnek az almát állítottunk meg:
(Az egyes gyümölcsöket a kezdőbetűkkel jelöljük: A: alma, K: körte, Sz: szilva, Cs: cseresznye)

A, A, A	A, K, A	A, Sz, A	A, Cs, A
A, A, K	A, K, K	A, Sz, K	A, Cs, K
A, A, Sz	A, K, Sz	A, Sz, Sz	A, Cs, Sz
A, A, Cs	A, K, Cs	A, Sz, Cs	A, Cs, Cs

Valójában elsőre bármelyiket is sikerült megállítani, első gomb megállításakor kijött gyümölcsöt kell a második és a harmadik keréken is eltalálni $\frac{1}{4}$ *annak a valószínűsége hogy a másodikon is ugyanaz lesz,* $\frac{1}{4}$ *annak a valószínűsége hogy a harmadikon is ugyanaz lesz, illetve* $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}=0{,}0625$ *a valószínűsége annak, hogy a másodikon és a harmadikon egyszerre ugyanaz a gyümölcs lesz, mint az elsőn. Ebből adódóan viszont* $\frac{15}{16}=0{,}9375$ *valószínűséggel nem nyerünk.*
Egy lehetséges eredménnyel várható nyereményt úgy számoljuk ki, hogy a lehetséges eredménnyel kapható nyereményt megszorozzuk a hozzá tartozó valószínűséggel. Pl. az egy forgatásonkénti várható átlagos nyeremény $400\cdot\frac{1}{16}=25.$
100 forintonként (három forgatással) tehát átlagosan 75 forintot, 1000 forintonként átlagosan 750 forintot nyernénk; azaz minden 1000 forintos játékkal bukunk átlagosan 250 forintot.

Gyakorló feladatok

1.) A 32 fős 7. A osztály az osztályfőnökkel együtt Mikulásbulira készül. Az este folyamán mindenki meglepetés ajándékot kap. Már előzőleg sorsoltak, mindenkinek a nevét egy sapkába tették, és ebből húztak.
   a) Hányféle húzás lehetséges, ha saját magát senki nem húzhatja?
   b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy Julcsi az osztályfőnököt húzza?

2.) Farsangi bálon tombolát árusítanak. A fődíj mellett 1 kiemelt díj, és további 30 különböző ajándék vár kisorsolásra.
   a) Ha összesen 150 tombolát adtak el, hányféle sorsolás lehetséges?
   b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha Zsuzsi 2 tombolát vásárol, mindkét tombolája nyer?

3.) Három dobozban vannak vegyesen golyók. Az egyikben 5 kék és 5 piros, a másodikban 2 kék és 8 piros, a harmadikban 8 kék és 2 piros. Mekkora valószínűséggel húzunk piros golyót, ha az első két dobozt egyaránt ¼ valószínűséggel választjuk?

4.) (Radnainé Szendrei Júlia emlékére) Mikor igazságos egy játék? „Karcsi tegnap játszani hívott. Pénzt tartott a tenyerében, és nekem ki kellett találnom, hogy a pénznek melyik oldala van fölül. Ha eltaláltam, 3 Ft-ot kaptam, amennyiben írás volt felül, egyet, ha fej. Amikor nem találtam el, mindig 2 Ft-ot kellett fizetnem. Azóta is azon gondolkozom, igazságos volt-e ez a játék.” (Megjegyzés: Akkor mondjuk egy játékra, hogy igazságos, ha se nem nyerünk, se nem vesztünk rajta hosszú távon.)

Kitűzött feladatok

1.) A 32 fős 7. A osztály az osztályfőnökkel együtt Mikulásbulira készül. Az este folyamán mindenki meglepetés ajándékot kap. Már előzőleg sorsoltak, mindenkinek a nevét egy sapkába tették, és ebből húztak. Mekkora a valószínűsége annak, hogy három barátnő, Ági, Blanka és Cili egymást húzták?

2.) Farsangi bálon tombolát árusítanak. A fődíj mellett 1 kiemelt díj, és további 30 különböző ajándék vár kisorsolásra. Ha összesen 150 tombolát adtak el, 10 tombolát vásárolva mekkora valószínűsége van annak, hogy lesz (1 vagy több) nyertes szelvényünk?

3.) Hogyan alakul a várható nyeremény értéke az előzőekben ismertetett félkarú rabló játéknál, ha a kerekein 2-2 almát lecserélnek 2-2 cseresznyére (azaz minden keréken lesz 3 alma, 5 szilva, 5 körte és 7 cseresznye), és a nyereményeket így módosítják:
3 alma: 600Ft
3 körte: 400Ft
3 szilva: 400Ft
3 cseresznye: 200Ft.
(Itt is az 1000 forintos játékkal elérhető átlagos nyereményt számoljuk ki!)

4.) Két dobozban piros és kék golyók vannak vegyesen. Az elsőben 4 piros és 6 két, a másikban 1 piros és 9 kék. Az első dobozt 0,3 valószínűséggel választjuk. Kétszer húzunk, a kihúzott golyót nem tesszük vissza. Mekkora valószínűséggel lesz mindkét golyónk piros?

Beküldési határidő: **2013.03.25.**
Postai cím: Matematikai Tehetségfejlesztő,
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.