Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu e-mail: boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör **2014/2015. 2. feladatsor**
7.-8. évfolyam

Prímszámok, összetett számok, négyzetszámok

Matematika órán, mindig mindent bizonyítani kell, semmit sem szabad néhány példa alapján a szemünknek elhinni. De az eredmény megsejtésében sokat segíthet egy ügyes, módszeres próbálgatás, aztán talán könnyebb a helyes válasz ismeretében bizonyítást is találni.

Mintapéldák

1. Mi lesz az első *n* páratlan pozitív egész szám összege?

Így túl általános a kérdés, nézzünk pár példát. Vegyük az első, az első két, az első három stb. páratlan szám összegét először, hátha megsejtünk valamit.

$1=1=1^2$

$1+3=4=2^2$

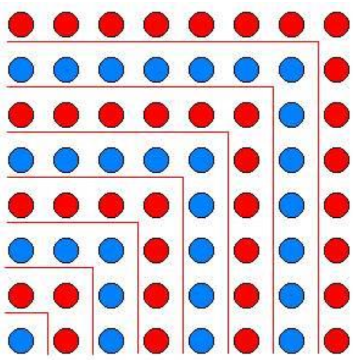
$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

Itt az lesz a sejtésünk, hogy az első 5 páratlan egész szám összege 25 lesz, és valóban.

$1+3+5+7+9=25=5^2$

De vajon ez mindig így marad? Ha az első 20 páratlan számot adom össze, akkor 20^2 *- t fogok kapni?*



Az ábrán jól látható, hogy a kiinduló 1 × 1 négyzethez pont 3 db kicsi négyzet kell, hogy egy 2 × 2 négyzetet kapjunk. Aztán 5 db kicsi négyzet kell a 3 × 3 négyzethez. És így tovább. Ha már van egy n × n négyzetünk, akkor n + n – 1 = 2n -1 négyzet kell az (n + 1) × (n + 1) négyzethez. Ezzel szemléletesen igazoltuk, hogy ***az első n pozitív páratlan szám összege*** n^2**.**

2. Mutassuk meg, hogy $3^{202}+5\cdot 3^{210}+1$ összetett szám!

Az oszthatósági feladatok megoldásában gyakran segít, ha az utolsó számjegyeket vizsgáljuk. Ha találunk egy alkalmas osztót, akkor kész is vagyunk. Tudjuk, hogy a 2 és a 3 nem jöhet szóba, hiszen 3 páratlan szám összege is páratlan, hárommal osztva pedig 1 maradékot kapunk, ezért nézzük meg az 5 – öt. A három tag közül a második osztható 5 – tel. Ha a másik kettő összegéről sikerül megmutatnunk ugyanezt, akkor kész is vagyunk. Mivel $3^{202}=9^{101}$*, és 9 minden páratlansokadik hatványa 9-re végződik, így ha egyet hozzáadunk, akkor az összeg 0-ra végződik, vagyis osztható lesz 5 – tel.*

3. Mennyi lesz 19^{100} 20-szal vett osztási maradéka?

Sokszor az osztási maradék az érdekes. Mennyi 19? Hát egy híján 20. $19^{100}=(20-1)^{100}=\underbrace{(20-1)(20-1)\cdots(20-1)}_{100}$. *Ha ezt a 100 tényezős szorzatot kibontjuk, akkor mindent szorzunk mindennel, és egy kivétellel az összes szorzatban szerepel legalább 20 első hatványa. (Érdemes esetleg az első három tényezőt valóban kibontani, hogy lássuk is, ne csak elhiggyük az állítást.) Az egy kivétel az összeg utolsó tagja* $(-1)^{100}$ *vagyis, amikor mindegyik zárójelből a (-1)-eket szorozzuk össze. Ez a hatvány éppen 1. Tehát a 20-szal vett osztási maradék 1.*

4. Mutassuk meg, hogy $2006^{2006}-2008$ osztható 2007-tel!

Mivel 2006 egy híján 2007, így $2006^{2006}-2008=(2007-1)^{2006}-2008$. *Az előző okoskodás mintájára ennek a 2007-tel vett osztási maradéka* $1-2008=-2007$, *ami osztható 2007-tel.*

5. Milyen számjegyre végződhetnek a négyzetszámok?

A négyzetszámok végződését egyértelműen meghatározza, milyen számjegyre végződik maga a szám, amelynek a négyzetét vizsgáljuk. A nullára végződő szám négyzete 0-ra végződik, az 1-re, illetve 9-re végződő szám négyzete 1-re végződik, a kettőre, nyolcra végződő szám négyzete 4-re végződik, a 3-ra és a 7-re végződő szám négyzete 9-re végződik, az 5-re végződő szám négyzete 5-re végződik, a 6-ra végződő szám négyzete pedig szintén 6-ra végződik.
A négyzetszámok tehát 0,1,4,5,6,9 számjegyek valamelyikére végződhetnek.

6. Mutassuk meg, hogy a 43214321 összetett szám!

$43214321=4321\cdot 10000+4321=4321\cdot(10000+1)=4321\cdot 10001$
Tehát két szám szorzata, így összetett szám.

Gyakorló feladatok

1. Milyen számjegyre végződik a $4^8+5^7+6^6$ összeg?
2. Mutassuk meg, hogy $2006^{2006}-1$ összetett szám!
3. Mutassuk meg, hogy $1+2014^{2015}$ osztható 2015-tel!
4. Lehet-e négyzetszám a $2014^{2015}+2015^{2014}+2013$?
5. Mutassuk meg, hogy a 4444422222 összetett szám!

Kitűzött feladatok

1. Mutassuk meg, hogy 1111112111111 szám összetett!
2. Mutassuk meg, hogy $2014^{2014}+2013^{2013}+1$ összetett szám!
3. Mutassuk meg, hogy $2016^{2016}-2014^{2014}$ osztható 2015-tel!
4. Lehet-e $2001^{2001}+2002^{2002}+2003^{2003}$ négyzetszám?

Beküldési határidő: 2014.12.15.
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.