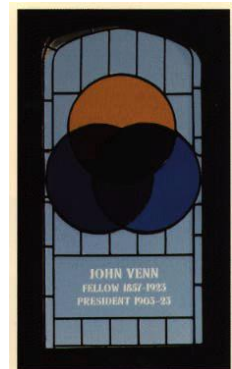




Halmazok

Egy kupac kopasz kukac, meg még egy kupac kopasz kukac, az két kupac kopasz kukac. Vagy mégsem? Inkább egy kupac, csak kicsit nagyobb kupac? Vagy csak egy ugyanolyan kupac továbbra is? Ha a pozitív páros számok halmazához hozzávesszük a nullát, nagyobb lesz a halmaz? Ha a Csendes Óceánba beleöntünk egy pohár vizet, több víz lesz benne? Ha az osztályodba járó diákok halmazához hozzávesszük az osztályba járó lányokat, növeljük a halmazt?

Már az 1800-as évek közepén foglalkoztak halmazokkal, logikával. A két terület szorosan összefügg. A témával sokat foglalkozott egy angol matematikus, John Venn. A neve a Venn diagram kapcsán gyakran előkerül. Meglepően hosszan élt, 1834 – 1923, és azon túl, hogy érdekelte a matematika, igen „játékos” elme lehetett. Tervezett és épített egy krikettező gépet, ami sikeresen megvert több jónak tartott krikett játékost is. (krikett – Angliában kedvelt játék, golyókat kell bizonyos szabályok szerint egy ütővel gurítani) Ezentúl, az apai hagyományokat követve evangélikus lelkész volt. Az ő nevéhez fűződik a halmazok körökkel való szemléltetése, mely megtalálható annak az intézetnek ajtaján is Cambridge-ben, melynek egykor a vezetője volt. Cambridge-ben halt meg.



Mintapéldák

1. Adott a következő három halmaz: $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$,
 $B = \{\text{egyjegyű pozitív páros számok}\}$ $C = \{15 - \text{nél kisebb prímszámok}\}$
Legyen az $U = \{x | 1 \leq x \leq 15, \text{és } x \in \mathbb{Z}\}$

a) Igazak-e a következő állítások?

- $5 \in C$ (5 eleme a C halmaznak)
- $1 \notin A$ (1 nem eleme az A halmaznak)
- $\{3; 5; 7; 10\} \subseteq A$ (A 3;5;7;10 elemekből álló halmaz részhalmaza A-nak)
- $A \subset C$ (A halmaz valódi részhalmaza C-nek, vagyis A minden eleme eleme C-nek, és C-ben van olyan elem, mely nem eleme A-nak)

b) Helyezd el a halmazok elemeit Venn-diagramon! Add meg a következő halmazok elemeit!

- $A \cap B$ (A metszet B mindazon elemeket tartalmazza, melyek elemei A-nak is és B-nek is.)
- $(C \cup B) \setminus A$ (C és B halmaz egyesítése minden olyan elemet tartalmaz, melyek A és B közül legalább az egyikben benne vannak. A két halmaz egyesítéséből vesszük ki az összes olyan elemet, melyek elemei A-nak is.)
- $A \cap (C \setminus B)$

- $(\overline{A \cap B}) \setminus C$ (A és B halmaz metszetének komplementere mindazokat az elemeket tartalmazza, melyek nincsenek az A és B halmaz közös részében. Ezek közül vesszük ki az összes olyan elemet, melyek a C halmazban is szerepelnek.)

Megoldás:

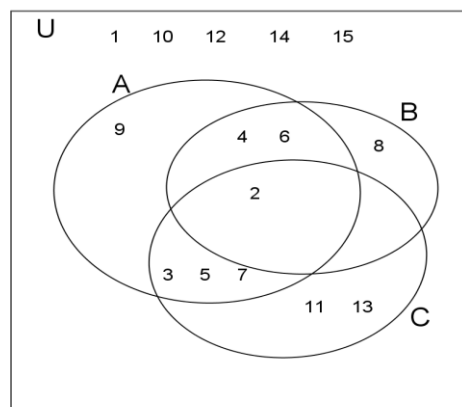
a) Soroljuk fel az U, a B, és a C halmaz elemeit!

$$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\} \quad B = \{2; 4; 6; 8\}$$

$$C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$$

- Igaz, mert az 5 a 15-nél kisebb prímszám, így eleme C-nek.
- Igaz, mert az A halmaz elemei között nem szerepel az 1.
- Hamis, mert a 10 nem eleme az A halmaznak.
- Hamis, mert az A halmaz nem minden eleme eleme C-nek is.

b) Készítsük el a Venn-diagramot! Az ábra alapján válaszolhatunk a kérdésekre:

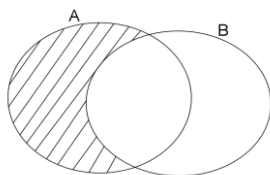


- $A \cap B = \{2; 4; 6\}$
- $(C \cup B) \setminus A = \{8; 11; 13\}$
- $A \cap (C \setminus B) = \{3; 5; 7\}$
- $(\overline{A \cap B}) \setminus C = \{1; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 15\}$

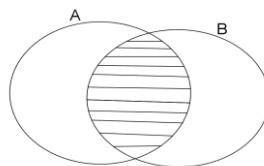
2. Az előző feladatban szereplő A és B halmazokra igaz-e, hogy $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$? Igaz-e általában az állítás, vagy az egyenlőség függ az adott halmazoktól?

Megoldás: $A \setminus B = \{3; 5; 7; 9\}$, ezeket az elemeket A halmazból kivéve a $\{2; 4; 6\}$ halmazt kapjuk, mely $A \cap B$ halmazzal egyenlő. Így az állítás igaz.

Az egyenlőség független az adott halmazoktól, hiszen Venn-diagramon szemléltetve:



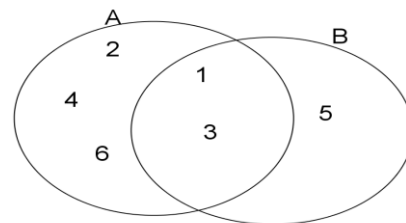
$A \setminus B$,



majd a következőn $A \setminus (A \setminus B)$, ami valóban egyenlő $A \cap B$ -vel.

3. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A \setminus B = \{2; 4; 6\}$, $A \cap B = \{1; 3\}$. Határozzuk meg A és B halmazokat!

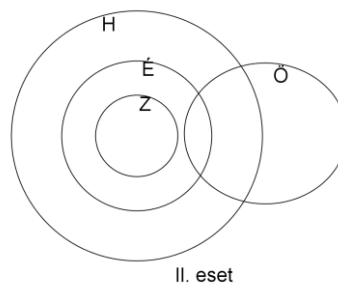
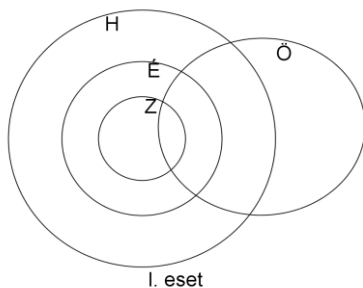
Megoldás: Készítsünk Venn - diagramot! Ebbe elsőként a metszet elemeit írjuk be, majd azokat az A-beli elemeket, melyek nem elemei B-nek. Eddig elhelyeztük az 1;2;3;4;6 elemeket. Mivel az $A \cup B$ elemei között szerepel az 5, ez csak úgy lehetséges, ha az 5 eleme B-nek, de nem eleme A-nak.



Ekkor az ábráról leolvasható: $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ és $B = \{1; 3; 5\}$

4. Minden zongorista énekkaros, és minden énekkaros hosszú hajú. Van olyan énekkaros, akinek ötöse van matematikából. A felsorolt állítások közül melyik biztosan igaz?
- Minden zongorista hosszú hajú.
 - Nem minden zongoristának van ötöse matematikából.
 - Minden zongoristahosszú hajú, és ötöse van matematikából.
 - Van olyan, akinek ötöse van matematikából és hosszú hajú.

Megoldás: A Venn-diagram most is segít, hiszen a részhalmazok szemléltetése is megtörténik, mikor elkészítjük. A feladat szövege szerint a zongoristák (Z) az énekkarosok (É) részhalmazát alkotják, az énekkarosok pedig a hosszú hajúak (H) halmazában vannak. Az „ötöse van matematikából” tulajdonsággal rendelkezőket az (Ö) halmazzal jelölve a következő két halmazábrát készíthetjük el:



- I. eset, amikor van olyan Z-beli elem, mely eleme Ö-nek is,
 II. eset, amikor nincs olyan Z-beli elem, mely eleme Ö-nek is.

A feladat feltételei mindkét esetben teljesülnek.

- Az esetektől függetlenül igaz, hiszen: $Z \subseteq H$
- Nem lehet eldönteni, mert mindkét eset előfordulhat, az I. esetben igaz lehet, a másodikban hamis, így nem mondható, hogy biztosan igaz.
- Az igaz, hogy minden zongorista hosszú hajú, de az állítás csak akkor igaz, ha a mondat második fele is igaz. Arról nem tudunk semmit, hogy a Z és Ö halmaz elemei milyen kapcsolatban vannak, így ez az állítás sem feltétlen igaz, nem eldönthető.
- Ez biztosan igaz, hiszen minden énekkaros hosszú hajú, és legalább egynek ötöse van matematikából.

Gyakorló feladatok

1. Az A, B, C halmazokról tudjuk, hogy

$$A \setminus B = \{4; 6; 8\},$$

$$B \setminus C = \{2; 5; 9; 10\},$$

$$C \setminus A = \{3; 7; 11\},$$

$$A \cap B \cap C = \{1\},$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11\},$$

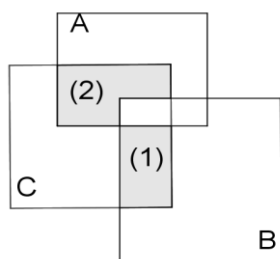
$$C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11\}$$

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat, ha tudjuk, hogy C -nek öt eleme van!

2. Adj meg olyan A, B, C halmazokat, melyre igaz a következő állítás:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

3. Add meg halmazműveletekkel a következő (1), (2)-vel jelölt részhalmazokat!



4. Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár. Nem minden arany, ami fénylik. Néhány bogár fénylik. Vannak-e arany bogarak?

Kitűzött feladatok

1. Igaz-e, hogy $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$? Válaszodat indokold!

2. Az A , B és C halmazokról a következőket tudjuk:

$$A \cap B = \{2; 5\};$$

$$C \setminus B = \{3; 4; 7\};$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{1\};$$

$$(A \cap C) \setminus B = \{7\};$$

$$B \setminus (A \cup C) = \{ \}$$

$$(A \cap B) \setminus C = \{5\}$$

Add meg a $(\bar{C} \cap A) \setminus B$ halmaz elemeit!

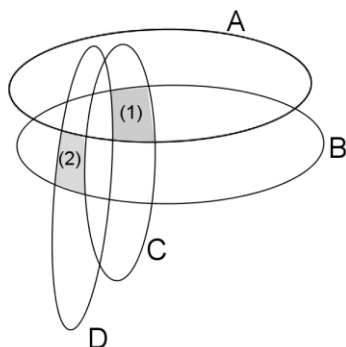
3. A beszélő szamarak minden barátja barna mellényt hord. Az ogrék közül van, aki a beszélő szamarak barátja. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Válaszodat indokold meg!

a) Az ogrék közül nincs olyan, aki barna mellényt hord.

b) Ha valaki barna mellényt hord, az a beszélő szamarak barátja.

c) Ha valaki nem hord barna mellényt, akkor az nem barátja a beszélő szamaraknak.

4. Add meg halmazműveletekkel a következő ((1) és (2)) tartományokat!



Beküldési határidő: **2015.02.01**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.