



**Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium**

2600 Vác, Németh László u. 4- 6.

☎: 27- 317 - 077

☎/fax: 27- 315 - 093

WEB: <http://boronkay.vac.hu> e-mail: [boronkay@vac.hu](mailto:boronkay@vac.hu)



*Levelező Matematika Szakkör*

*2014/2015. 4. feladatsor*

*5.-6. évfolyam*

### **Mire számíthatunk?**

A mindennapi életben gyakran találkozunk olyan eseményekkel, melyeknek bekövetkezésének lehetőségére, annak gyakoriságára kíváncsiak vagyunk.

Nézzük a következő esetet:

Vegyünk a kezünkbe 7 dobókockát. Rázzuk össze és dobjuk az asztalra! A dobás előtt válaszoljunk három kérdésre.

- 1.) Lesz-e a 7 kocka között kettő olyan, amelyik a felső lapján egyforma számot mutat?
- 2.) Lehet-e a 7 kocka felső lapján levő számok összege 43?
- 3.) Szerepel-e majd a felső lapon a 6-os?

Az első két kérdésre a válasz egyszerűen eldönthető. Az elsőre a válasz igen, mert a kockákon csak hatféle szám van, így legfeljebb hat különböző szám jöhet ki, a hetediknek már valamelyik előzővel egyeznie kell. A másodikra a válasz nem, hiszen ha az összes kocka 6-ost mutat, az összegük 42, tehát 43 soha nem lehet.

A 3. kérdésre már nem tudunk egyértelmű feleletet adni, lehet, hogy lesz olyan kocka, esetleg több is, amelyik a 6-os lapjával van felfelé, de előfordulhat, hogy egy sem lesz ilyen.

Az események általában két csoportra oszthatók:

- olyanokra, amelyek feltétlenül bekövetkeznek, vagy semmiképpen sem következnek be (Egyértelmű igen, vagy nem válasz adható)
- olyanokra, amelyek esetleg bekövetkeznek, esetleg nem.

Ez utóbbi esetben feltehetjük a kérdést: „**Mi a valószínűsége, hogy bekövetkezzen?**”

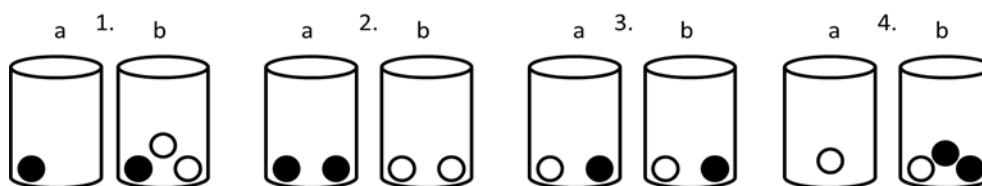
A továbbiakban ilyen feladatokkal foglalkozunk.

### **Mintapéldák**

1. A középkorban egy várúrnak megesett a szíve egy halálra ítéltten. Azt mondta neki: Lásd kivel van dolgod, kapsz egy lehetőséget az életben maradásra. Itt van két egyforma korszó és 4 egyforma nagyságú golyó: kettő fekete, kettő fehér. Rakd a golyókat mind a korszókba, egy golyót se hagyj ki, és egyik korszó se legyen üres. Aztán behívjuk a hóhért. Az egyik korszóból kivesz egy golyót. Ha fehér, elengedlek, ha fekete meghalsz.

A halálraítélt töprengeni kezdett hogyan rakja a golyókat a korszóba. Mindegy-e, hogyan osztja el a két korszóba a golyókat?

Az alábbi elosztások lehetségesek:



Ha az **1. a**-ból húz, biztos halál, ha **1.b**-ből, lehet, hogy túléli.

Ha a **2. a**-ból húz, biztos halál, a **2. b**-ből biztos élet.

Ha a **3. a**, vagy **3. b**-ből húz, lehet élet, vagy halál.

A **4. a**-ból biztos élet, a **4. b**-ből lehet élet.

Nyilván az utolsó eset a legkedvezőbb az elítélt szempontjából.

2. Egy piros és egy kék dobókockával egyszerre dobunk, majd a felső lapon levő számokat összeadjuk. Nagyszámú dobás esetén melyik összeg fordul elő a leggyakrabban? („Matematikusan” kérdezve: Melyik összeg előfordulásának nagyobb a valószínűsége?)

Egy esemény valószínűsége, melyet általában tört számmal fejezünk ki, 0-nál nem kisebb és 1-nél nem nagyobb szám, a kedvező esetek és az összes lehetséges eset hányadosa. Ha egy esemény **soha** nem következik be, **valószínűsége 0**, ha **mindig** bekövetkezik, **valószínűsége 1**.

Két dobás összege	Lehetséges esetek						Esetek száma	Valószínűség
2	1+1						1	1/36
3	1+2	2+1					2	2/36
4	1+3	2+2	3+1				3	3/36
5	1+4	2+3	3+2	4+1			4	4/36
6	1+5	2+4	3+3	4+2	5+1		5	5/36
<b>7</b>	<b>1+6</b>	<b>2+5</b>	<b>3+4</b>	<b>4+3</b>	<b>5+2</b>	<b>6+1</b>	<b>6</b>	<b>6/36 = 1/6</b>
8		2+6	3+5	4+4	5+3	6+2	5	5/36
9			3+6	4+5	5+4	6+3	4	4/36
10				4+6	5+5	6+4	3	3/36
11					5+6	6+5	2	2/36
12						6+6	1	1/36

Láthatjuk, hogy a 7-et kaphatjuk a legtöbb módon, tehát nagy-számú dobás esetén a 7 fog a leggyakrabban előfordulni. (Összesen 36 féle összeget kaphatunk, amiből a 7 hat féleképpen adódhat, valószínűsége 1/6.)

3. Egy dobozban 10 fehér, 12 fekete és 16 kék azonos méretű és anyagú golyó van. (A dobozban a golyókat nem látjuk, csak akkor tudjuk megnézni, ha már kivettük.) Legkevesebb hány golyót kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük:

- legalább három azonos színű?
- 11 azonos színű?

a) Előfordulhat, hogy az egyesével kihúzott golyók az első körben mind különböző színűek. A második körben ugyanez megismétlődhet, így már 2-2 lesz mindegyik színből. A hetedikre kihúzott golyó már a harmadik lesz valamelyik színből.

b) 11 azonos színű csak fekete, vagy kék golyóból lehet. Ha kivesszünk 10 fehéret, 10 feketét és 10 kéket, a következő kivételre már feketéből, vagy kékből meglesz a 11. azonos színű golyó. Összesen 31 golyó kivételével biztosan teljesül a feladat kikötése.

4. Egy dobozban 2 piros, 2 fehér és 2 zöld színű golyó van. Egymás után 3 golyót kihúzzunk és a húzás sorrendjében egymás mellé rakjuk. Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók piros – fehér – zöld színben követik egymást?

*Ebben az esetben van 6 golyónk, az első húzásnál 6 közül, a másodiknál 5 közül, a harmadiknál 4 közül választhatunk, tehát az összesen  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$  kimenetel van. Ahhoz, hogy a golyók a kívánt sorrendben kövessék egymást, először a két piros, másodsorra a két fehér, harmadszorra a két zöld közül válogathatunk. Az ilyen húzások száma  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Tehát az esemény valószínűsége: a kedvező húzások száma osztva az összes lehetőség számával  $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$*

### Gyakorló feladatok

1. Egy szabályos játékkockát kétszer egymás után feldobunk. A dobott számokat összeadjuk. Melyik eseményre lenne érdemes fogadni?

A: az összeg legfeljebb 4;

B: az összeg legalább 8;

C: Az összeg nagyobb 4-nél, de kisebb 8-nál?

2. Két dobókockával – amelyek oldalain egytől hatig vannak pontok – egyszerre dobunk. Tegyé! \* jelet a táblázat megfelelő rovataiba!

		Biztosan igaz	Lehet, hogy igaz	Lehetetlen
a)	Tizenkettőnél nem nagyobb a két dobókockán levő pontok összege.			
b)	A két dobókockán lévő pontok összege páros.			
c)	A két dobókockán lévő pontok összege páratlan.			
d)	Kettőnél kisebb a pontok összege.			
e)	Mindkét kockán azonos a pontok száma.			

3. Egy dobozban 5 fehér színű golyó van. Hány piros színű golyót tegyünk a dobozba, hogy a fehér golyó kihúzásának valószínűsége:

a)  $\frac{1}{2}$

b)  $\frac{1}{3}$

c)  $\frac{1}{4}$

d)  $\frac{1}{20}$

legyen?

## Kitűzött feladatok

1. Egy szabályos dobókockával kétszer egymás után dobunk és a dobott számokat egymás mellé írjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott kétjegyű szám:
  - a) 1-gyel kezdődik;
  - b) 60-nál nagyobb;
  - c) páros;
  - d) osztható 3-mal;
  - e) különböző számjegyekből áll.
2. Dezső barátaitól névnapjára különböző színű, de azonos méretű üveggolyókat kapott. Az 5 kék, 4 piros és 3 sárga golyót egy dobozba tette, majd becsukott szemmel kivett közülük 6 golyót. Tegye \* -ot a táblázat megfelelő rovataiba!

		Biztos	Lehetetlen	Lehetséges
a)	Legalább kétféle színű golyó van a kezében.			
b)	Mindhárom színű golyóból van nála.			
c)	4 piros golyó van a kivettek között.			
d)	Csak két golyó van a kezében.			
e)	Van 3 sárga és 2 piros golyó a kezében.			

3. Egy dobozban 100 golyó van: 28 piros, 20 zöld, 12 sárga, 20 kék, 10 fehér, 10 fekete. Legalább hány golyót kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük 15 azonos színű? (A dobozban a golyókat nem látjuk, csak akkor tudjuk megnézni, ha már kivettük.)
4. Egy dobozban 4 fehér, 3 piros és 2 zöld golyó van. Egymás után – visszatevés nélkül – kihúzzunk három golyót. Mi a valószínűsége, hogy:
  - a) az első piros, a második fehér, a harmadik zöld lesz;
  - b) a három golyó azonos színű lesz?

Beküldési határidő: 2015.03.01

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.