**Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium**
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
**WEB:** http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

***Levelező Matematika Szakkör*** ***2015/2016. 1. feladatsor***
***7.-8. évfolyam***

# Valószínűség számítás a társasjátékokban

Homo ludens, avagy a játékos ember – a kifejezés létezése jól mutatja, mennyire szeretünk játszani, legyünk gyermekek, vagy régebb óta fiatalok. Igazi kikapcsolódást ad a játék izgalma, öröme, a győzelem esélye, vagy egy izgalmas stratégia kipróbálása. Valahol mindig perdül a kocka és pörög a rulett, valahol mindig felveszi vagy lecsapja egy játékos a kártyalapokat, odább teszi a bábot a táblán, számokat ikszel be a szerencsemezőben. A játék során sokszor mellénk szegődik a szerencse, vagy épp elhagy minket. De megfogható-e a szerencse? Van-e törvényszerűség a háttérben? Ha van, megismerhető-e? Esetleg van-e valamilyen matematikai eljárás, ami mentén számolhatjuk az esélyeinket? Ezekre a kérdésekre néhány táblás, illetve kockajátékkal kapcsolatban keressük a választ következő feladatokban. A matematikának azt a területét, melybe most bepillantást nyerhetünk, valószínűség számításnak nevezzük. Ezen belül is a klasszikus valószínűségi modell lesz segítségünkre. Itt lényeges szempont, hogy mint pl. a kockadobásoknál szabályos kocka esetén 6 féle különböző dobás lehetséges, (tehát véges sok számú), és minden eredmény egyenlő eséllyel következhet be.

A matematika történet 1654-től, Pascalnak és Fermat-nak de Méré lovag problémájának megoldásáról szóló levelezésétől számítja a valószínűség számítás megszületését: a játékos egy kockával játszik a bank ellen. A bank nyer, ha a játékos négy dobásból legalább egy hatost dob. A kérdés az, hogy ez a feltétel kifizetődik-e a banknak?

## Mintapéldák

1. Egy szabályos kockával egyszer dobunk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 3-mal osztható számot dobunk?

   *Megoldás: kedvező számunkra, ha 3-at vagy ha 6-ot dobunk, ez két lehetséges eset, de összesen hatféle eset valósulhatna meg. A klasszikus valószínűségi modell szerint a* $\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$ *hányadost számolva annak a valószínűsége, hogy 3-mal osztható számot kapunk,* $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2. Két szabályos dobókockával egymás után dobunk, majd a dobások sorrendjében kétjegyű számot képzünk belőlük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 3-mal osztható számot kapunk?

   *Megoldás: mivel mindkét dobásnál 6 féle számot dobhatunk, és ezek egymástól függetlenek, összesen* $6\cdot 6=36$ *kétjegyű számot dobhatunk. Ezek közül a 12, 15, 21, 24, 33, 36,42, 45, 51, 54, 63, 66 lesz 3-mal osztható, ez 12 eset, így a keresett valószínűség* $\frac{12}{36}=\frac{6}{18}$.

Összeállította: Prehodáné Nagy Éva

3. Nagyon gyors, egyszerű, és akárhány fővel játszható a Bas játék:
   A játékosok körbe ülnek, az első dob a két kockával úgy, hogy a dobott értéket csak ő lássa. Ezek után közölni kell a dobás eredményét a következő szabályok figyelembe vételével:

   - A dobott értéket kétjegyű számként olvassuk fel, ahol a nagyobb szám van a tízesek helyén, a kisebb pedig az egyesekén. Vagyis ha egy négyest és egy ötöst dobtunk, akkor az 54 és nem 45 lesz.
   - Ha egyformát dobunk, akkor basunk van (azaz 22 = 2-es bas vagy 66 = 6-os bas), ami viszont többet ér az előző pontban említett dobásoknál.
   - Ha 21-et dobtunk jól jártunk, mert ez a legnagyobb kidobható érték, így nyilván ezt nem is lehet hazudni, hanem rögtön meg kell mutatni játékostársainknak.

   Tehát a kidobható értékek a következő sorrendben überelik egymást: 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 1-es bas, 2-es bas, 3-as bas, 4-es bas, 5-ös bas, 6-os bas és végül a 21. Valaki elkezdi a kört és dob, bejelenti, hogy mi az eredmény, az utána következő játékos eldönti, hogy vajon igazat mond-e vagy sem. Ha elhiszi, akkor a mondott értéknél mindenképpen nagyobbat kell mondania a saját dobásánál, még akkor is, ha így hazugságra kényszerül. Egyébként így nem is kell megmutatni, hogy mi volt a valós eredmény, csak továbbadjuk a kockákat. Aztán a következő játékosnak szintén el kell döntenie, hogy hiszi vagy sem, és így megy ez addig, amíg valakinek ki nem derül a hazugsága, vagy amíg valaki tévesen nem mondja, hogy a másik hazudik.

   Ám ha nem hiszi el a soron következő, amit mondtunk, mindenki előtt fel kell tárnunk dobókockáinkat. Ha igazat mondtunk, akkor a soron következő játékostársunk veszített egy életet, viszont ha mi lódítottunk, akkor a mi életünkből megy le egy. A következő játékos ilyenkor nulláról indul, tehát azt mond elsőnek, amit akar, nem kell semmit sem überelnie. A játék elején egyezzünk meg, hány élete van minden játékosnak. Érdemes ezt gyufaszállal vagy kártyalappal követni. A játéknak akkor van vége, amikor valakinek elfogyott az életpontja.

   Feladat: mekkora valószínűséggel dobunk bast?

   *Megoldás: hatféle számot dobhatunk, rendezzük táblázatba a lehetséges dobásokat. Vízszintesen az egyik, függőlegesen a másik kockán szereplő számokat írva, az összes esetet, felírhatjuk:*

| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *11* | *21* | *31* | *41* | *51* | *61* |
| *2* | *21* | *22* | *32* | *42* | *52* | *62* |
| *3* | *31* | *32* | *33* | *43* | *53* | *63* |
| *4* | *41* | *42* | *43* | *44* | *54* | *64* |
| *5* | *51* | *52* | *53* | *54* | *55* | *65* |
| *6* | *61* | *62* | *63* | *64* | *65* | *66* |

   *Összesen* $6 \cdot 6 = 36$ *eset van, ebből hat eset olyan, ahol a dobott két szám megegyezik, tehát a kedvező esetek száma 6. A bas valószínűsége tehát* $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

4. Toscana hercege fordult Galileo Galileihez a következő kérdéssel: Hogyan lehetséges, hogy három kockát feldobva, az összeg gyakrabban lesz 10, mint 9, miközben mindkét szám hat módon állhat elő „kocka-számok” összegeként?

Végezzük el a következő – Vancsó Ödöntől származó – gondolatkísérletet: Vegyünk három teljesen egyforma dobókockát, és fessük be őket feketére, fehérre, kékre. Adjuk őket oda egy embernek, és dobáltassuk fel a kockákat. Segítőnk meg tudja különböztetni a kockákat egymástól, hisz azok különböző színűek. Sok kísérlet végrehajtása után kap valamiféle relatív gyakoriságot a lehetséges értékekre. Ezután kössük be munkatársunk szemét, aki számára most a három kocka teljesen egyforma, hiszen nem látja a színüket. Most is nyilvánvalóan ugyanazt az eredményt kell kapnia az egyes értékek relatív gyakoriságára, hiszen a kockák nem tudják, hogy most éppen egy „vak" dobál velük, tehát nyilvánvalóan ugyanúgy viselkednek, mint eddig. Vegyük le ezután a színezést a kockákról, és a kendőt segítőnk szeméről. A kockák ismét ugyanúgy kell viselkedjenek, mint az előbb, hiszen a kockák arról sem tudnak, hogy be vannak-e színezve. Ebből az következik, hogy a megkülönböztető jellel ellátott kockák ugyanúgy viselkednek, mint a nem megkülönböztethető kockák. Tehát a sorrendet figyelembe kell vennünk a dobott értékeknél. Három kockával dobva a 9-es és a 10-es szám lehetőségeinek számát látva a válasz egyértelmű.

| 9 | lehetőségek száma | 10 | lehetőségek száma |
|---|---|---|---|
| 1+4+4 | 3 | 1+4+5 | 6 |
| 1+3+5 | 6 | 1+3+6 | 6 |
| 1+2+6 | 6 | 2+2+6 | 3 |
| 2+2+5 | 3 | 2+3+5 | 6 |
| 2+3+4 | 6 | 2+4+4 | 3 |
| 3+3+3 | 1 | 3+3+4 | 3 |
| összesen: | 25 lehetőség | összesen: | 27 lehetőség |

Hasonló problémával találkozunk a következő játékban is. 1995-ben, 20 évvel ezelőtt lett az év játéka a Catan telepesei társasjáték. A társasjátékban két szabályos kockával dobunk, most a dobott számok összege számít. A tábla mezőire el kell helyezni ezeket az összegeket, majd a mezők határán elhelyezett házak után számíthatunk nyereségre. Cél olyan mező mellé építeni házat, ami a legtöbbször előfordulhat a dobások során, mert ebből lesz bevétele a játékosnak. Melyik mező mellé érdemes építeni?

*Megoldás:*

| összeg | hány féle előállítás lehetséges | lehetőségek száma |
|---|---|---|
| 2 | 1+1 | 1 |
| 3 | 1+2, 2+1 | 2 |
| 4 | 1+3, 3+1, 2+2 | 3 |
| 5 | 1+4, 4+1, 2+3, | 4 |
| 6 | 1+5, 5+1, 4+2, 2+4, 3+3 | 5 |
| 7 | 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3 | 6 |
| 8 | 2+6, 6+2, 5+3, 3+5, 4+4 | 5 |
| 9 | 3+6, 6+3, 4+5, 5+4 | 4 |
| 10 | 4+6, 6+4, 5+5 | 3 |
| 11 | 5+6, 6+5 | 2 |
| 12 | 6+6 | 1 |

A legnagyobb esélye a 7-es mezőnek van, de a játék szabályai szerint ez a mező a rablóé, így a 6-os és a 8-as mező a legjobb választás.

A megoldás megtalálásához egy másik utat is választhatunk, a két kockán szereplő számokat rendezzük táblázatba, de most a dobott számok összegét írjuk le:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

A táblázatban összeszámolva, melyik összeg hányszor fordul elő, látható, a leggyakrabban a 7 fordul elő.

## Gyakorló feladatok

1. Három kockával egymás után dobunk, majd a dobások sorrendjében háromjegyű számot képzünk belőlük. Mekkora valószínűséggel dobunk 5-tel osztható számot?
2. Játszatok néhány Bas játékot, és figyeljétek meg, mikor nem érdemes már elhinni a mondott számot! Mekkora a valószínűsége a Bas játékban a 21-es számnak?
3. Hányféle összeg keletkezhet három szabályos kockával dobva? Hányféle lehetőség van az egyes összegek előfordulására? Az eredményeket foglald táblázatba!
4. Három kockával dobva mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legfeljebb 10?

## Kitűzött feladatok

1. Három kockával egymás után dobunk, majd a dobások sorrendjében háromjegyű számot képzünk belőlük. Mekkora valószínűséggel dobunk 4-gyel osztható számot?
2. A Sárkányország társasjátékban két nem szabályos dobókockánk van. Az egyiken 1 db egyes, 3 db kettes és 2 db hármas szám van, a másikon pedig 1 db kettes, 2 db hármas, 3 db négyes szám. A lépéseket a dobott számok összege alapján lehet megtenni. Melyik a legvalószínűbb lépéshossz?
3. Mekkora valószínűsége van annak, hogy a Bas játék során a 61-nél nagyobb számot mondó játékos nem hazudik?
4. Hányas számtól mondható el a Bas játékban, hogy kétszer olyan valószínű, hogy a játékos hazudik, mint az, hogy igazat mond?

Beküldési határidő: 2015. november. 12.

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

Összeállította: Prehodáné Nagy Éva