



## Nyerni jó☺

Így, az ünnepek közeledtével, játszunk tovább.

A játék nemcsak hogy végigkíséri az ember fejlődését, de szerepe sokféleképpen értelmezhető. Vannak, akik szerint a játékok a létfontosságú cselekvések biztonságos begyakorlására, rangsorok felállítására, a kapcsolatok megerősítésére valók. Mások modellként tekintenek a játékokra, melyekkel megjósolható bonyolult helyzetek kimenetele.

A játékelmélet a XX. század első felében kialakult tudományterület. Megszületését hagyományosan Neumann János és Oskar Morgenstern „Játékelmélet és gazdasági viselkedés” című művének 1944-es megjelenéséhez kötik. A játékelmélet nemcsak a társasjátékokban, de többek között a közgazdaságtanban, pszichológiában, hadászatban, és az evolúcióelméletben egyaránt megjelenik.

A mesterséges intelligencia kutatások sok első eredménye is a játékokhoz köthető. Természetesen azon játékok kutatása nagy kihívás, melyeknél a játékosoknak, akár az emberi, akár a gépi játékosnak, ellenőrizhető befolyásuk van a játék kimenetelére. Az ilyen játékokat stratégiai játékoknak nevezzük, ilyenek például a sakk, a dáma vagy akár a póker.

A nyerő stratégia megtalálása azonban nem mindig egyszerű.

### Mintapéldák

1. Ketten játszanak. Egy téglalap alakú asztalra felváltva raknak le egyforma korongokat, minden lépésben egyet-egyet. A korongoknak egyik oldaluk teljes felületével az asztalon kell feküdniük, és nem fedhetik egymást. Az veszít, aki már nem tud lerakni korongot, mert nincs több hely az asztalon.

Kezdeni érdemes, vagy inkább másodiknak játszani? Van-e nyerő stratégiája valamelyik játékosnak?

*Megoldás: Néhány játszma után láthatjátok, hogy ebben a játékban az első játékosnak van nyerő stratégiája. Első lépésben az asztal közepére kell tennie a kezdő korongot, majd ezután mindig a második játékos szimmetrikus képére, hiszen ha van még hely a második játékos lépésének, akkor biztosan szabad lehetőség annak a képe is.*

*A szimmetriára való törekvés más játékokban is segíthet. Lássunk erre egy újabb példát.*

2. Van 20 egyforma korongunk. Két egyforma kupacra osztjuk őket, így mindkét kupacban 10-10 korong van. Két játékos felváltva vesz el valamelyik, de egyszerre csak az egyik kupacból tetszőleges számú korongot.

a) Az a játékos nyer, aki az utolsó korongot elveszi. Hogyan játsszanak a játékosok, ha nyerni akarnak?

b) Mi történik akkor, ha az egyik kupacban 9, a másikban 11 korong van?

*Megoldás: Kezdetben a két kupacban azonos számú korong van, így ez az állás szimmetrikusnak tekinthető. A kezdő játékos lépése, amikor valamelyik kupacból korongot vagy korongokat vesz el, mindig megbontja ezt a szimmetriát, míg a második játékos válaszlépése visszaállíthatja azt, ha ugyanannyi korongot vesz el a másik kupacból. A végső állapot, amikor egyik kupacban sincs már korong, szintén szimmetrikus, így a második játékosnak van lehetősége elérni ezt, ha ügyesen játszik. Azaz a második játékosnak van nyerő stratégiája.*

*Ha viszont kezdetben a két kupacban különböző számú korong van, akkor a kezdő játékos nyerhet, hiszen ő tud törekedni a szimmetrikus állapot elérésére.*

*Felmerülhet a kérdés, hogy hogyan változik a stratégia, ha megcseréljük a szerepeket, azaz most az a játékos veszít, aki az utolsó korongot elveszi. Hogyan játsszanak ekkor a játékosok, ha nyerni akarnak? Ismét a szimmetria elérése a nyerő stratégia, de a játék végén egy kicsit módosítanunk kell. Az egyforma elemszámú kupacokat előállító játékos egészen addig fenntartja a szimmetriát, amíg el nem éri, hogy mindkét kupacban 2-2 korong legyen.*

*Ha az ellenfele ekkor az egyik kupacban egyetlen egy korongot hagy, akkor a másik kupacot egy az egyben el kell venni, így az ellenfélnek megmarad az utolsó 1 korong, tehát ő veszít. Ha viszont az ellenfél egy az egyben elveszi az egyik kupacot, akkor a másik kupacból 1 korong elvételével ismét meghagyhatjuk neki az utolsó, azaz a „vesztő” korongot.*

*(Ha az egyik játékos az egyik kupacot elveszi, akkor a másik játékos egyet meghagy neki. Ha az egyik játékos az egyik kupacból csak egyet hagy, akkor a másik az egész kupacot elveszi.)*

*Látható, hogy a nyerő stratégia keresésekor visszafelé gondolkodtunk.*

3. Egy kupacban 21 kavics van. Két játékos játszik, akik felváltva 1, 2 vagy 3 darabot vehetnek el. Az nyer, aki az utolsó illetve utolsókat veszi el.

Kinek van nyerő stratégiája?

*Megoldás: Gondolkodjunk ismét visszafelé! Aki előtt már csak 3 vagy kevesebb korong lesz, az meg tudja nyerni a játékot, hiszen legfeljebb 3 korongot elvehet. Ez nyerő állás.*

*4 darab kavics ugyanebből a megfontolásból vesztes állás, hiszen akárhány (1, 2 vagy 3) darabot veszünk is el, ellenfelünk elveheti a maradékot, és ezzel nyer.*

*Ha továbbgondoljuk, láthatjuk, hogy 8, 12, 16 vagy 20 darab kavics szintén vesztes állás. Ezek a számok 4 többszöröse. Vesztes állásból vesztes állásba nem lehet kerülni, viszont bármely más esetből meg lehet játszani azokat.*

*Ebben a játékban a vesztes állások tehát: 4, 8, 12, 16, 20 db korong. Ennek megfelelően 21 kavics esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, mégpedig úgy, ha először 1 kavics elvételével 20-ra csökkenti a kavicsok számát.*



9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	V	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	V
6	+	+	+	V	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	V	+	+	+
4	+	+	+	+	+	V	+	+	+	+	+
3	+	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	V	+	+	+	+	+	+	+	+
1	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

*Mindkét játékos célja, hogy veszítő mezőre lépjen a bábuval, hiszen onnan ellenfele akárhova is lép, a következő körben újabb veszítő helyre tudja tenni a királynőt, és így tovább. Jól látható, hogy ebben a játékban a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, ráadásul két veszítő mezőre is léphet kezdésképp.*

### **Gyakorló feladatok**

1. Egy asztalra kilenc tízforintost tettünk egymás mellé „fej” oldalukkal felfelé. Ketten játszanak, felváltva lépnek. Egy játékos egy lépésben kiválaszt egy, vagy két olyan szomszédos érmét, amelyek „fej” oldala van felül. A kiválasztott érmét, vagy érméket átfordítja „írás” oldalukra. Az nyer, aki eléri, hogy minden érmén „írás” legyen felül. Van-e nyerő stratégiája bármelyik játékosnak?
2. Egy kupacban 50 kavics van. Két játékos játszik, akik felváltva 2, de legfeljebb 5 darabot vehetnek el. Az nyer, aki az utolsót illetve az utolsókat veszi el. Kinek van nyerő stratégiája? Legkevesebb hány lépésben lehet nyerni?
3. Két játékos egy hosszú táblán játszik, melynek mezői 1-től 100-ig vannak számozva. Kezdetben az *A* játékos bábúja a 1-n, a *B* játékosé pedig a 100-on áll. A két játékos felváltva lép, *A* mindig a nagyobb sorszámú mezők irányába lép 2-t, 3-t vagy 4-t, *B* pedig az ellenkező irányba lép szintén 2-t, 3-t vagy 4-t. Az nyer, aki kiüti a másik bábúját, azaz lépésével pont oda jut, ahol a másik áll. Kinek van nyerő stratégiája, aki elsőnek lép, vagy aki másodikkal?
4. Ketten a következő játékot játsszák. Egy 9×11-es tábla jobb felső sarkába helyeznek egy bástyát. A két játékos felváltva lép a bástyával, mindig lefelé akárhány mezőt, vagy balra tetszőleges számú mezőt.
  - a) Az nyer, aki a bal alsó sarokba lép a bástyával.
  - b) Az veszít, aki a bal alsó sarokba lép a bástyával.

Tud-e valamelyik játékos úgy játszani, hogy mindenképp nyerjen? Hogyan játsszon?

(Végiggondolásra: Találsz-e kapcsolatot a 2. b) mintafeladat és a 4. gyakorló feladat között?)

## Kitűzött feladatok

1. Ketten játszanak. Felváltva írnak egy-egy „+” vagy „-” előjelet valamelyik szám elé a következő sorban:

1            2            3            4            5            6            7            8            9

Minden szám elé kerül előjel. Ezután összeadják az így keletkezett 9 db előjeles számot.

- a) Ha az összeg 3-mal osztható, akkor a kezdő játékos nyert, ha nem, akkor a második. Hogyan játszanak a játékosok, ha nyerni akarnak?
  - b) Hogyan változik a stratégia, ha megfordítjuk a szerepeket, azaz a második játékos nyer akkor, ha a kapott összeg osztható 3-mal, különben pedig a kezdő játékos?
2. Van három kupacunk, az elsőben 1, a másodikban 2, a harmadikban pedig 3 korong. Két játékos felváltva vesz el valamelyik, de egyszerre csak az egyik kupacból tetszőleges számú korongot. Az a játékos nyer, aki az utolsó korongot elveszi.  
Hogyan játszanak a játékosok, ha nyerni akarnak?
  3. Egy kupacban 50 kavics van. Két játékos játszik, akik felváltva 2, de legfeljebb 5 darabot vehetnek el. Az veszít, aki az utolsót illetve az utolsókat veszi el.  
Kinek van nyerő stratégiája? Legkevesebb hány lépésben lehet nyerni?
  4. Ketten a következő játékot játsszák. Egy  $9 \times 11$ -es tábla jobb felső sarkában áll egy királynő. A két játékos felváltva lép a királynővel, mindig lefelé akárhány mezőt, vagy balra tetszőleges számú mezőt, vagy átlósan balra lefelé akármennyit. Az veszít, aki a bal alsó sarokba lép a királynővel.  
Kinek van nyerő stratégiája?

Beküldési határidő: 2016. jan.11.  
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.