



**MEGOLDÁSOK**

1. Összesen 9 szám van, így az utolsó szó az első játékosé, ő négy szám elé tehet valamilyen előjelet, míg a második három szám elé. Ha összeadjuk mind a 9 darab számot, 45-öt kapunk, ez osztható 3-mal. A számok között minden 3-as maradék háromszor fordul elő:

maradék:	0	1	2
számok:	3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8

A számokból párokat alkothatunk úgy, hogy összegük 3-mal osztható legyen, azaz 1 maradékot adó számnak a 2 maradékot adó számok közül bármelyik lehet a párja, és viszont. 3-mal osztható számnak viszont csak 3-mal osztható szám lehet a párja.

- a) A kezdő játékos akkor nyerhet, ha 3-mal osztható számmal kezd. Ezután,
- ha ellenfele 3-mal osztható számot választ, akkor utána ő is, tetszőleges előjellel,
  - ha 1 maradékot adót, akkor ő 2 maradékot adót, ugyanolyan előjellel,
  - ha pedig 2 maradékot adót, akkor ő 1 maradékot adót, ugyanolyan előjellel.

Azaz minden lépésével 3-mal oszthatóvá teszi a már kiválasztott számok összegét, és mivel övé az utolsó szó, a végösszeg is 3-mal osztható lesz.

b) Ekkor is nyerhet a kezdő játékos. Mivel övé az utolsó szó, arra kell törekednie, hogy utolsó szám ne 3-mal osztható szám maradjon, majd utolsóként „el tudja rontani” az összeget az alábbiak szerint:

- ha az eddig kiválasztott 8 szám összege osztható 3-mal, akkor az utolsó szám előjele bármi lehet;
- ha a már kiválasztott 8 szám összege nem osztható 3-mal, akkor hozzájuk adva az utolsó számot, vagy levonva belőlük, a kapott végeredmény egyik esetben biztosan nem lesz osztható 3-mal. Ha az összeg, akkor „+” jelet ír, ha a különbség, akkor „-” jelet.

2. A kezdő játékos veszít, hiszen csak a második játékos tudja előállítani a szimmetriát. Ebben a játékban szimmetrikus állapotnak az számít, ha kettő darab egyforma számú korongból álló kupac van. Az első játékosnak hat lehetséges kezdő lépése van, ezekre a szimmetriát előállító válaszlépések a következők:

$$\begin{aligned} < 0, 2, 3 > \rightarrow < 0, 2, 2 > \\ < 1, 1, 3 > \rightarrow < 1, 1, 0 > \\ < 1, 0, 3 > \rightarrow < 1, 0, 1 > \\ < 1, 2, 2 > \rightarrow < 0, 2, 2 > \\ < 1, 2, 1 > \rightarrow < 1, 0, 1 > \\ < 1, 2, 0 > \rightarrow < 1, 1, 0 > \end{aligned}$$

Ezek után háromféle végjáték lehetséges:

1. Két kupacban 1-1 korong van, és a kezdő játékos következik. Neki el kell vennie valamelyik 1 korongból álló kupacot, így a második játékosnak marad az utolsó korong a másik kupacban, tehát nyer.

2. Két kupacban 2-2 korong van, és a kezdő játékos következik. Ha ő elveszi az egyik 2 korongból álló kupacot, a második játékos egy az egyben elveszi a másik kupacot, és nyer.

3. Két kupacban 2-2 korong van, és a kezdő játékos következik. Ha ő 1 korongot vesz el valamelyik kupacból, a második válaszként a másik kupacból vesz el 1 korongot. Innen lásd 1. eset.

3. Az veszít, aki előtt végül 1, vagy 2 kavics marad. Mivel  $7 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2$ , így ebben a játékban a vesztes állások a következők: 1, 8, 15, 22, 29, 36 valamint 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44 és 50. A kezdő játékos eleve vesztes állapotból indul, így a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Mivel  $50 = (2 + 5) \cdot 7 + 1 = 7 \cdot 7 + 1$ , ezért a második játékos legkevesebb  $7 + 1 = 8$  lépésben tud nyerni.

4. A bal alsó sarok feletti, illetve melletti mezők a soron következő játékos számára biztosan vesztes pozíciók, hiszen onnét már csak a bal alsó – azaz a vesztes – mezőre lehet lépni.

9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	V	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	V
6	+	+	+	V	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	V	+	+	+
4	+	+	+	+	+	V	+	+	+	+	+
3	+	+	V	+	+	+	+	+	+	+	+
2	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	⊗	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Ebben a játékban is a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. Kezdeképpen két lehetősége is van „vesztő” mezőre lépni.