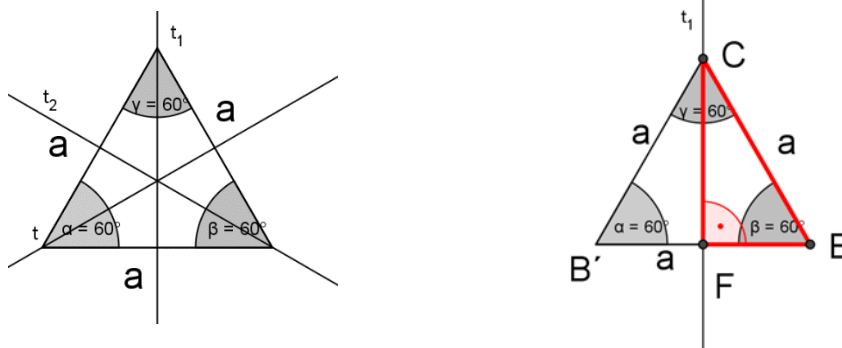


## „Félszabályos” háromszögek

Milyen lehet a félszabályos háromszög? Talán a szabályos háromszögekre vonatkozó tulajdonságoknak csak a felével rendelkeznek? Nem egészen. Először lássuk, mit jelent, hogy a háromszög szabályos. Szabályos háromszögnek azt a háromszöget nevezzük, melynek mindhárom oldala ugyanakkora. Mivel egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, ezért a szögek is egyenlők. A háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ , ezt kell három egyenlő részre osztani, tehát egy belső szög  $60^\circ$ . Ennek a háromszögnek három szimmetriatengelye van, a tengelyek egy-egy csúcsra illeszkednek, és a szemközti oldalra merőlegesek.



Az egyik szimmetriatengelyt meghagyva, az a háromszöget két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Az ábrán látható FBC háromszöget, a szabályos háromszög „felét” nevezzük „félszabályos” háromszögnek. A továbbiakban ez a háromszög segít a feladatok megoldásában.

### Mintapéldák

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög  $30^\circ$ , akkor az átfogó kétszerese a rövidebb befogónak!

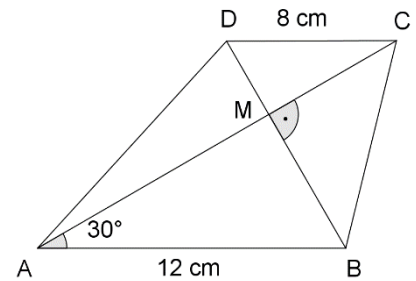
*Megoldás:*

*A bevezetőben használt FBC derékszögű háromszöget figyeljük meg. Mivel derékszögű háromszögben a hegyesszögek összege  $90^\circ$ , a másik hegyesszög  $60^\circ$ . Tükrözzük a háromszöget a hosszabb (FC) befogóra! A tükrözés tulajdonságai miatt - bármely szög egybevágó a képével - a  $B'CB$  háromszög minden szöge  $60^\circ$ , azaz szabályos, így - ismét a tükrözés tulajdonságai miatt - minden oldala, így a CB is kétszer olyan hosszú, mint az FB- ezzel bizonyítottuk az állítást!*

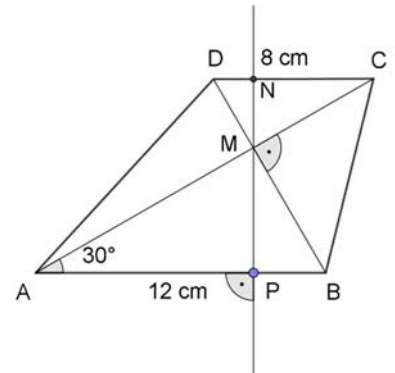
2. Egy trapéz alapjai  $AB = 12\text{ cm}$  és  $DC = 8\text{ cm}$  hosszúak. Az AC átló  $30^\circ$ -os szöget zár be az alappal, és merőleges a másik, DB átlóra.
  - a) Hány cm hosszú a trapéz DB átlója?
  - b) Igazold, hogy az átlók M metszéspontján az alapokra állított merőleges az alapokat egy-egy negyedelő pontban metszi!

Megoldás:

a) Az ábrán látható, hogy  $AMB$  derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele, ezért  $MB=6$  cm.  $DMC$  háromszögben  $DCM$  szög  $30^\circ$ -os, mert  $DCM$  és  $MAB$  szögek váltószögek.  $DMC$  háromszög is egy szabályos háromszög fele, ezért  $DM$  szakasz 4 cm. Így a  $DB$  átló  $4$  cm +  $6$  cm =  $10$  cm.



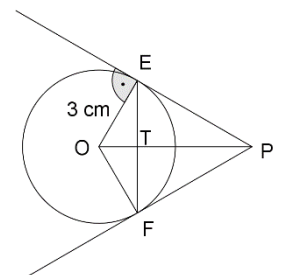
b) Az átlók metszéspontján, az alapokra merőleges egyenesnek az alapokkal vett metszéspontja legyen  $N$ ,  $P$ . Ekkor ismét szabályos háromszög fele keletkezik, mert  $MDC$  szög  $60^\circ$ -os,  $MDN$  szög azonos  $MDC$  szöggel, a háromszög derékszögű. Így  $DN$  ebben a szabályos háromszögben  $DM = 4$  cm hosszú oldalának fele. Tehát  $DN = 2$  cm,  $NC = 6$  cm, így valóban  $N$  a  $DC$  szakasz negyedelőpontja. Hasonlóan belátható, hogy  $MPB$  is szabályos háromszög fele, tehát  $PB$  az  $MB = 6$  cm oldal fele. Így  $PB = 3$  cm, ami szintén a  $12$  cm negyede.



3. Egy 3 cm sugarú körtől 3 cm-re lévő pontból érintőket húztunk a körhöz. Melyik a hosszabb: az érintőszakasz, vagy a két érintési pontot egymással összekötő szakasz?

Megoldás:

Az  $OEP$  háromszög egy szabályos háromszög fele, mert a háromszög derékszögű és az átfogó,  $OP$  távolság 6 cm, a rövidebbik befogó kétszerese. Így az  $EOP$  szög  $60^\circ$ -os,  $OET$  szög pedig  $30^\circ$ -os.  $TEP$  szög így  $60^\circ$ -os lesz. Hasonlóan  $TFP$  szög is  $60^\circ$ -os, így  $EFP$  szabályos háromszög, tehát az érintési pontokat összekötő szakasz hossza megegyezik az érintő szakaszok hosszával. A bizonyításban kihasználtuk, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.



### Gyakorló feladatok

- Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói, ha az egyik átló felezőmerőlegese az egyik oldalt az egyik harmadoló pontjában metszi?
- Az ABCD téglalap A csúcsából húzott, az AB oldallal  $60^\circ$ -os szöget bezáró egyenes a BC oldal - C ponton túli - meghosszabbítását az E pontban metszi. Az EDC szög  $30^\circ$ -os, a BC oldal hossza 4 egység. Milyen hosszú az EB szakasz?
- Az ABC egyenlőszárú háromszögben  $ABC$  szög =  $CAB$  szög =  $80^\circ$ . Az AC száron egy P, a BC száron egy Q pontot vettünk fel úgy, hogy  $PBQ$  szög =  $30^\circ$  és  $QAP$  szög =  $40^\circ$ . Mekkora a  $QPB$  és  $PQA$  szögek?

### **Kitűzött feladatok**

1. Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög, az A csúcsnál pedig  $30^\circ$ -os szög van. Milyen hosszú az AC oldal, ha a C csúcs az AB oldaltól 5 cm távolságra van?
2. Az ABC háromszögben  $AC = BC$ . Az A pont BC oldaltól való távolsága éppen fele a BC szakasz hosszának. Mekkora a háromszög szögei?
3. Számoljuk ki egy paralelogramma területét, ha a 20 cm hosszú oldala a 30 cm hosszú átlóval  $30^\circ$ -os szöget zár be!
4. Egy  $60^\circ$ -os szög mindkét szárát érinti a 6 cm sugarú kör. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti mindkét szögszárat és a 6 cm sugarú kört is?

Beküldési határidő:

**2016.02.29.**

Postai cím:

Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

Összeállította: Prehodáné Nagy Éva