Váci SzC Boronkay György
Műszaki Technikum és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 – 077; 27-412-077; 30-332-4264
WEB: http://boronkay.hu **e-mail:** boronkay@boronkay.hu

Levelező Matematika Szakkör **2024/2025. 3. feladatsor**
5.-6. évfolyam

Érdekes számok

A természetes számok tanulmányozása már a legrégebbi időktől foglalkoztatja az embereket. A számokkal kapcsolatos problémák megoldása mindig izgalmas kihívást jelentett. A különböző tulajdonságú számoknak a vizsgálata végigkísérte a matematikatudomány fejlődését. Felvetődtek olyan kérdések is, amelyek bizonyos típusú számok összeszámlálására vonatkoznak. Az összeszámlálási problémák vizsgálatával a matematikának egyik ága, a kombinatorika foglalkozik.

A kombinatorikai feladatok nagyon szerteágazóak, éppen ezért nehéz őket típusfeladatok szerint rendezni. Ennek ellenére igyekszünk egy kezdetleges betekintést nyújtani az ilyen típusú feladatok világába. Vizsgálat tárgyává tesszük, hogy miként kell összeszámlálni bizonyos speciális tulajdonságokkal rendelkező természetes számokat.

Mintapéldák

1.) Pontoskodónak nevezzük azt a természetes számot, amelyben a számjegyek pontosan annyiszor szerepelnek, amennyi a számjegy alaki értéke. Például egy ilyen pontoskodó szám az 1333244244. Hány olyan legfeljebb hatjegyű pontoskodó szám van, amelyeket ezres kerekítés esetén fölfelé kerekítünk?

Megoldás:

A fölfelé kerekítéshez szükséges, hogy a százasok helyén 4-esnél nagyobb számjegy szerepeljen. Ezért a legfeljebb négyjegyű pontoskodó számok között nincs ilyen tulajdonságú szám.

Az ötjegyű pontoskodó számokban a következő számjegyek szerepelhetnek:

- öt darab 5-ös számjegy, ebben az esetben az egyetlen szám az **55 555**;
- egy darab 1-es és négy darab 4-es számjegy, az ilyen típusú pontoskodó számok közül egy sem felel meg az említett tulajdonságoknak;
- két darab 2-es és három darab 3-as számjegy, ezekből sem alkothatunk az adott tulajdonsággal rendelkező számot.

A hatjegyű pontoskodó számokban a következő számjegyek szerepelhetnek:

- hat darab 6-os számjegy, ebben az esetben az egyetlen szám a **666 666**;

- egy darab 1-es és öt darab 5-ös számjegy, ebben az esetben összesen öt olyan szám van, amely megfelel a feltételeknek: **155 555; 515 555; 551 555; 555 515; 555 551**;
- két darab 2-es és négy darab 4-es számjegy, az ilyen típusú pontoskodó számok közül egy sem felel meg az említett tulajdonságoknak.

Tehát, a fentieket összefoglalva, összesen **hét** olyan legfeljebb hatjegyű pontoskodó szám van, amelyeket ezres kerekítés esetén fölfelé kerekítünk.

2.) Palindrom számoknak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyek számjegyeit fordított sorrendben olvasva ugyanazt a számot kapjuk. Például ilyen palindrom szám az 56 865. Hány olyan páros ötjegyű palindrom szám van, amelyben szerepel legalább egy páratlan számjegy?

Megoldás:

A megoldás során könnyebben célt érünk, ha meghatározzuk, hogy hány ötjegyű páros palindrom szám van, majd ebből kivonjuk azoknak a számát, amelyekben csak páros számjegyek szerepelnek.

Mivel páros ötjegyű palindrom számokat keresünk, ezért az utolsó számjegy csak 2, 4, 6 vagy 8 lehet, mivel az első számjegy az utolsó számjeggyel egyenlő, ezért ide csak egyféle szám kerülhet. A második számjegy a negyedik számjeggyel egyenlő, ezért erre a két helyre tíz számjegy közül választhatunk. A harmadik számjegy esetében szintén 10 lehetőség közül választhatunk. Így összesen $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ páros palindrom szám van.

Most vizsgáljuk meg azokat az ötjegyű palindrom számokat, amelyekben csak páros számjegyek szerepelnek! Az utolsó számjegy esetében (ez egyenlő az első számjeggyel) a 2, 4, 6 és 8 számjegyek valamelyikét választhatjuk (4 lehetőség), a második és negyedik számjegyek egyenlők, ide a 0, 2, 4, 6 és 8 számjegyek közül választhatunk (5 lehetőség). A harmadik számjegy esetében is a 0, 2, 4, 6 és 8 számjegyek közül választhatunk (5 lehetőség). Így összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ olyan ötjegyű páros palindrom szám van, amelynek minden számjegye páros. Tehát összesen $400 - 100 = \mathbf{300}$ olyan ötjegyű páros palindrom szám van, amelyben szerepel legalább egy páratlan számjegy.

3.) *Púposkodó* számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyekre érvényes, hogy minden számjegye különböző és nincs olyan számjegye, amely nála két nagyobb számjegy között áll. Hány ötjegyű *púposkodó* szám képezhető az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből?

Megoldás:

Válasszuk szét az eseteket az 5-ös számjegy helyzete szerint.

Ha az 5-ös számjegy az első helyen áll, akkor a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást, így egyetlen ilyen szám az 54321. Hasonló a helyzet, ha az 5-ös számjegy az utolsó helyen áll, ebben az esetben az egyetlen szám az 12345.

Ha az 5-ös számjegy az ezresek helyiértékén áll, akkor a tízezresek helyiértékére az 1, 2, 3 és 4 számjegyek közül bármelyik kerülhet, a másik három számjegy pedig az 5-ős számjegytől jobbra csökkenő sorrendben helyezkedik el. Ilyen módon négy számot képezhetünk, ezek a 15432, 25431, 35421 és 45321. Hasonlóképpen négy számot kapunk, ha az 5-ös számjegy a tízesek helyiértékén áll, ezek a 12354. 12453, 13452 és 23451.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Ha az 5-ös számjegy a százasok helyiértékén áll, akkor a maradék négy számjegyből kettes csoportokat képezünk. Ezeket az 5-ös számjegytől jobbra, illetve balra helyezzük el, a jobb oldalon csökkenő, míg a bal oldalon növekvő sorrendben. Ilyen módon a következő számokat kapjuk: 12543, 13542, 14532, 23541, 24531 és 34521.

A fentiekben felsorolt eseteket összeszámolva $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = \mathbf{16}$ ötjegyű *púposkodó* szám képezhető az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből.

4.) Nevezzük *összeférhetetlen számoknak* az összes olyan természetes számot, amelyben az őt alkotó számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel, de az azonos számjegyek nem állhatnak egymás mellett. Például egy ilyen összeférhetetlen szám a 2352535. Hány összeférhetetlen szám van 50000 és 60000 között?

Megoldás:

Mivel az említett szám 50000-nél nagyobb, de 60000-nél kisebb, ezért a tízezresek helyén 5-ös szerepel. Ezért még legalább egy 5-ös számjegynek szerepelnie kell és a két 5-ös nem állhat egymás mellett. A maradék három helyi értékre viszont csak 5-ösökből és legfeljebb egy másik alaki értékű számjegyből választhatunk, mivel ellenkező esetben olyan számjegy is létezne, amelyik csak egyszer szerepel. Tehát, egy ilyen összeférhetetlen szám szigorúan csak 5-ösökből és egy másik alaki értékű számjegyből állhat. Így az ezresek helyére 9 lehetséges számjegy közül válogatunk. A százasok helyére viszont csak 5-ös kerülhet, mivel az ezresek helyén álló számjegyet nem választhatjuk. Folytatva a gondolatmenetet, a tízesek helyére az ezresek helyén álló számjegy, míg az egyesek helyére az 5-ös számjegy kerül. Tehát 50000 és 60000 között a következő összeférhetetlen számok vannak: 50505; 51515; 52525; 53535; 54545; 56565; 57575; 58585 és 59595. Tehát összesen **kilenc** összeférhetetlen szám van 50000 és 60000 között.

Gyakorló feladatok

1.) Melyikből van több és mennyivel: a 10 jegyű palindrom számokból vagy a 9 jegyű palindrom számokból?

2.) Hány olyan legfeljebb hétjegyű pontoskodó szám van, amelynek első számjegye nagyobb az utolsónál?

3.) Egy hatjegyű természetes számot *cikcakk* számnak nevezünk, ha a második számjegye kisebb az elsőnél, a harmadik nagyobb a másodiknál, a negyedik kisebb a harmadiknál, az ötödik nagyobb a negyediknél és a hatodik kisebb az ötödiknél. Hány olyan cikkcakk szám létezik, amelyben a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek pontosan egyszer szerepelnek?

4.) Hány hatjegyű *összeférhetetlen szám* létezik?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Mennyi az ötjegyű pontoskodó számok összege?

2.) Hány olyan palindrom szám van, amely:
   a) kétjegyű;
   b) háromjegyű;
   c) négyjegyű;
   d) legalább 5000 és legfeljebb 9500?

3.) Hány olyan 5000-nél kisebb *púposkodó* páros szám van, amelyet ezres és százas kerekítés esetén is lefelé kerekítünk?

4.) Hány olyan ötjegyű *összeférhetetlen szám* van, amelynél az őt alkotó számjegyek szorzata páratlan?

Beküldési határidő: **2025.02.06**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Váci SzC Boronkay György
Műszaki Technikum és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 – 077; 27-412-077; 30-332-4264
WEB: http://boronkay.hu **e-mail:** boronkay@boronkay.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2024/2025. 3. feladatsor***
7.-8. évfolyam

Mennyi az esélye? Mennyi a valószínűsége?

Aki fogadást köt, az nyerni is szeretne. A nyerés esélyei sokszor a véletlentől is függenek, de azt, hogy valamilyen esemény mekkora valószínűséggel következik be, meg lehet előre határozni. Például ha egy dobozban két golyó van, egy kék és egy piros, 1/2 a valószínűsége annak, hogy pirosat húzunk. Érthető, hogy magában ez a megállapítás semmit sem ér, nem biztosítja, hogy tíz egymás utáni húzás esetén ötször pirosat és ötször kéket húzunk. Mégis érdemes ezt az elméleti esélyt kiszámítani. Ennek módjával foglalkozunk ezen a feladatlapon. A valószínűség meghatározásakor először a számunkra KEDVEZŐ lehetőségeket kell megszámolni majd az ÖSSZES esetet. Ezek hányadosa lesz a valószínűség. (Amennyiben ezt %-ban fejezzük ki, úgy esélyről beszélhetünk.)

A matematikának talán egy területén sem olyan nehéz a tévedések elkerülése, mint a valószínűségszámításban. Az eredmények helyességét a kísérletek nagyszámú elvégzésével lehet igazolni. Arra, hogy még komoly matematikusok is tévedhetnek, két érdekességet említünk:

A nagy LEIBNIZ (1646-1716) azt állította, hogy két kockával 12-t dobni ugyanolyan könnyű, mint 11-et. (Hogy ez nem így van, azt majd a 4.) mintapéldában láthatod.)

D'ALEMBERT (1717-1783) pedig arra a problémára adott téves megoldást, amelyet helyesen a 3.) mintapéldában találsz.

Mintapéldák

1.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy:

a) egy 32 lapos magyarkártyacsomagból piros színt húzunk?

b) egy szabályos dobókockával páros számot dobunk?

c) egy olyan dobozból, amelyben 4 fehér, 1 fekete és 5 piros golyó van, nem húzunk feketét?

Megoldás:

a) A piros lapok száma 8, az összes lap 32, a valószínűség: $\frac{8}{32} = 0{,}25$. (25%)

b) 3 db páros szám van a 8 közül, így $\frac{3}{6} = 0{,}5$ a valószínűség. (50%)

c) A kedvező esetek száma a NEM fekete golyók száma, azaz 9, az összes pedig 10, így a valószínűség: $\frac{9}{10} = 0{,}9$. (90%)

A feladatsort összeállította:
Cs. Nagy András

2.) Egy olyan dobozból, amelyben négy piros, egy fehér és egy zöld golyó van, kihúzunk hármat. Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket!

a) Mind piros.

b) Egy közülük fehér.

c) Van köztük piros.

<u>*Megoldás*</u>:

Először az összes lehetséges esetek számát számítjuk ki, mert ez mindig szükséges. Hat golyó közül hármat 20-féleképpen lehet kihúzni. Ez a szám kerül minden valószínűség nevezőjébe. (Ha megszámoznánk a golyókat, akkor az alábbi számhármasok jelenthetnék a kihúzott golyókat: 123; 124; 125; 126; 134; 135; 136; 145; 146; 156; 234; 235; 236; 245; 246; 256; 345; 346; 356; 456)

a) A négy piros golyó közül hármat 4-féleképpen tudunk kiválasztani, hiszen éppen ennyiféleképpen hagyhatunk ki közülük egyet. Így a valószínűség: $\frac{4}{20} = 0{,}2$.

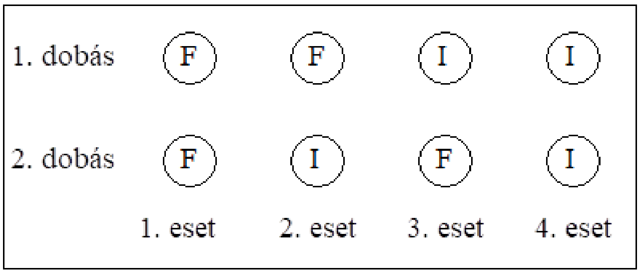
b) Az egyetlen fehér mellé még másik két golyót kell kiválasztani a maradék 5-ből. Ezt 10-féleképpen tehetjük meg. (12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.) A valószínűség tehát $\frac{10}{20} = 0{,}5$.

c) Mivel a 6 golyó közül csak kettő van, ami nem piros, így ez az esemény biztosan bekövetkezik, valószínűsége: $\frac{20}{20} = 1$

3.) Ha egy pénzdarabot kétszer feldobunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy esetben fejet dobunk?

<u>*Megoldás*</u>:

A helyes megoldást az ábra szemlélteti:
Összesen tehát 4 esetünk van. E közül a 4 eset közül 3 eset kedvező a számunkra: 3 olyan eset van, amelyben legalább egyszer fejet dobtunk. A keresett valószínűség tehát: $\frac{3}{4}$.



(D'ALEMBERT tévesen így gondolkodott: Összesen 3 eset lehetséges: vagy fejet dobunk az első alkalommal, vagy fejet dobunk a második alkalommal, vagy egyik alkalommal sem dobunk fejet.
E közül a 3 eset közül 2 kedvező. A keresett valószínűség tehát 2/3.)

A feladatsort összeállította:
Cs. Nagy András

4.) Ketten játszanak úgy, hogy két dobókockával dobnak egyszerre. Ha a dobott számok összege 2, 3, 4, 9, 10, 11, vagy 12, akkor az első számú játékos nyer, ha a dobott számok összege 5, 6, 7, vagy 8, akkor a második számú játékos nyer. Melyik játékos szerepét vállalnád szívesebben? Igazságos-e a játék?

<u>*Megoldás*</u>:

A jobb oldali táblázat azt mutatja, hogy hogyan jöhetnek ki az egyes számok összegként. (Vegyük figyelembe, hogy a kockák megkülönböztethetők!)
Az alábbi táblázat alapján összeszámolhatjuk, hogy a felső sorban levő számok annyiféleképpen jönnek ki, amennyit az alattuk lévő szám mutat:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*

Ebből kiolvashatjuk, hogy a szerencse a második számú játékosnak kedvez. (Az ő számai 20-szor, míg ellenfeléé csak 16-szor találhatók a táblázatban.) Az első játékos nyerési esélye $\frac{16}{36}$, a másodiké $\frac{20}{36}$. Az Akkor volna a játék igazságos, ha mindegyik játékoshoz 18-18 eset tartozna.
(Ha valaki esetlg ismeri a Catan telepesei nevű társasjátékot, akkor ezeket az esélyeket használja bátran stratégiájának kidolgozásakor!)

<u>**Gyakorló feladatok**</u>

1.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha az 52 kártyát tartalmazó franciakártyacsomagból kihúzunk egy lapot, az
a) ász;
b) király, dáma vagy bubi;
c) kőr lesz?

2.) Egy dobozba 6 nagy és 4 kicsi piros golyót, 8 nagy és 6 kicsi fehér golyót tettünk. Találomra kihúzunk egyet. Melyik valószínűbb, hogy pirosat vagy az, hogy kicsit húzunk?

3.) András és Béla egy meleg nyári délután ül a kerthelyiségben. A szerencsére bízzák, hogy ki hozza ki a következő 1-1 üveg kólát úgy, hogy „fej vagy írást” dobnak egy pénzdarabbal. „Fej” esetén András fizeti a kört, „Írás” esetén Béla. András, aki már háromszor egymás után nyert, nagylelkűen más dobási módot ajánl. Béla két pénzdarabbal dobhat, ő eggyel, Béla akkor nyer, ha több fejet dob, mint ő. Az új módszer szerint mennyivel változott Béla esélye az eredeti játékszabályokhoz képest?

A feladatsort összeállította:
Cs. Nagy András

4.) Négyen játszanak, két kockával dobnak, s az alábbiak szerint gyűjtik a pontokat:

Az „A” játékos akkor kap 1 pontot, ha a kockákon a számok különbözők.

A „B” játékos akkor kap 2 pontot, ha legalább az egyik kockán 6-os fordul elő.

A „C” játékos akkor kap 3 pontot, ha a dobott számok összege 7.

A „D” játékos akkor kap 4 pontot, ha a két szám egyforma.

36 dobásból mennyi a legvalószínűbb elérhető pontszám? Tippeld meg a játékosok sorrendjét ennek alapján!

Kitűzött feladatok

1.) A 32 lapos magyarkártyacsomagból 2 lapot találomra kihúzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a makk király a 2 lap között lesz?

2.) Egy dobozban 3 piros, 2 fehér és 1 zöld golyó van. 3 golyót kihúzva közülük, mennyi annak a valószínűsége, hogy:

a) A három golyó egymás mellé téve a magyar trikolórt adja ki?

b) Nincs köztük zöld?

c) Az osztrák trikolórt tudjuk kirakni egymás mellé belőlük?

3.) Zita fogadást ajánlott Petinek. Azt mondta, hogy feldob három 10 Ft-os pénzdarabot a levegőbe, és ha mind fej lesz, vagy mind írás, akkor ő fizet 200 Ft-ot Petinek; ha pedig másképp esnek, akkor Peti fizet neki 100 Ft-ot. Mit tegyen Peti? Elfogadja-e vagy inkább utasítsa vissza a fogadást?

4.) Két gyerek 2 dobókockával játszik. Az egyik dob, de a dobás után a pontokat eltakarja. A második megtippeli a pontszámok összegét. Ha eltalálja, 50 Ft-ot kap, ha nem találja el, 10 Ft-ot fizet. Ha Te lennél a találgató, akkor melyik számot mondanád?
Igazságosnak tartod-e az 1 : 5 nyerési arányt?

Beküldési határidő: **2025.02.06**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Cs. Nagy András